

Dispense del corso di

Elettronica Ls

Prof. Guido Masetti

Elaborazione dei segnali

Sommario

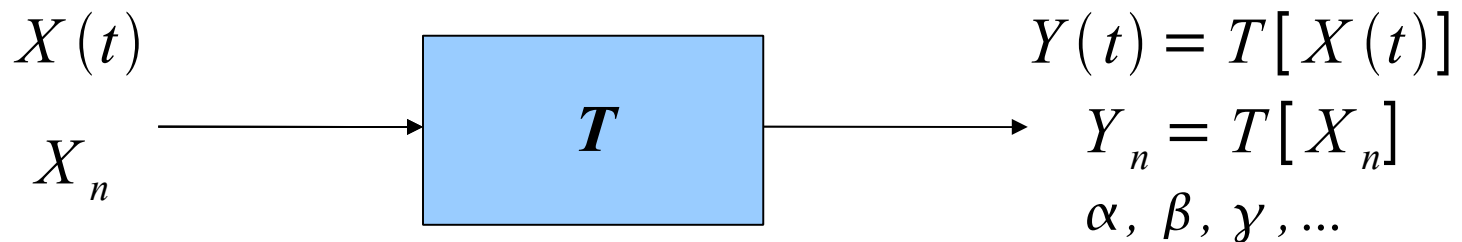
- Elaborazione del segnale
- Sistemi lineari tempo invarianti (LTI), tempo-continui e tempo-discreti
- Analisi di Fourier dei sistemi LTI
- Elaborazione analogica dei segnali
- Limiti dell'elaborazione analogica
- Elaborazione numerica dei segnali
- Vantaggi e limiti dell'elaborazione numerica

Elaborazione del segnale

- Con i termini **elaborazione del segnale** (in inglese *signal processing*) si intendono l'insieme delle tecniche di **analisi** ed **elaborazione**, che mirano alla modifica delle proprietà del segnale stesso, nonché alla estrazione e modifica del contenuto informativo in esso contenuto.
- In base alla tipologia di segnali trattati (analogici o numerici), si parla di:
 - elaborazione analogica dei segnali
 - elaborazione numerica dei segnali

Elaborazione del segnale

- Matematicamente l'elaborazione di un segnale può essere rappresentata come una relazione ingresso uscita di un sistema tempo-continuo o tempo-discreto:



Elaborazione del segnale: esempi

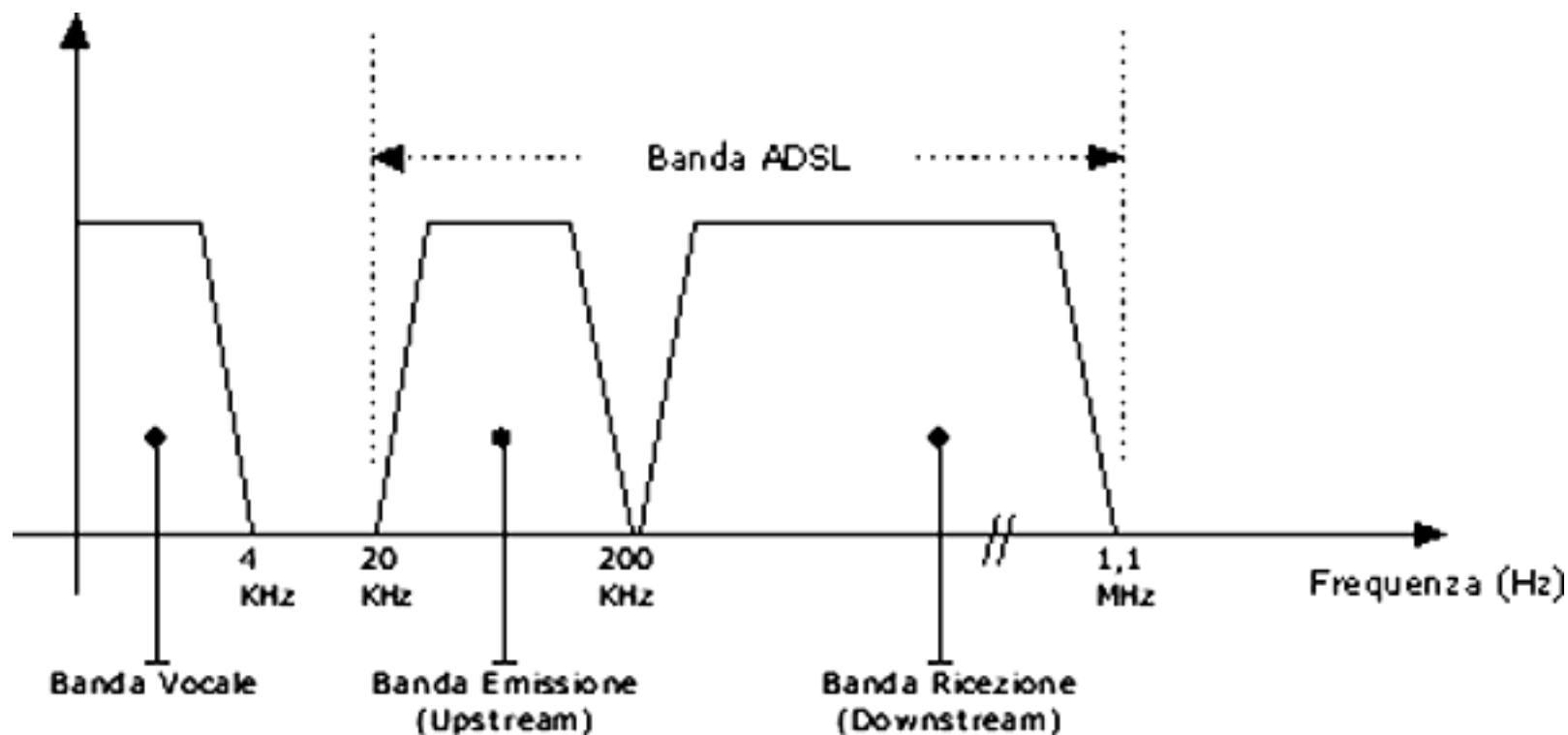
- **Filtraggio:** nelle comunicazioni la banda del canale è una risorsa limitata. Si ha quindi la necessità di delimitare la banda di un segnale.
- Il filtraggio può essere effettuato sia in un dominio tempo-continuo (filtro analogico) che in un dominio tempo-discreto (filtro digitale).

Esempio:

segnale telefonico: limitazione della banda del segnale vocale ($B = 50 - 10000$ Hz) all'intervallo $B = 300 - 4000$ Hz

segnale telefonico + ADSL: separazione del segnale vocale dal segnale dati di download e upload.

Elaborazione del segnale: esempi



Elaborazione del segnale: esempi

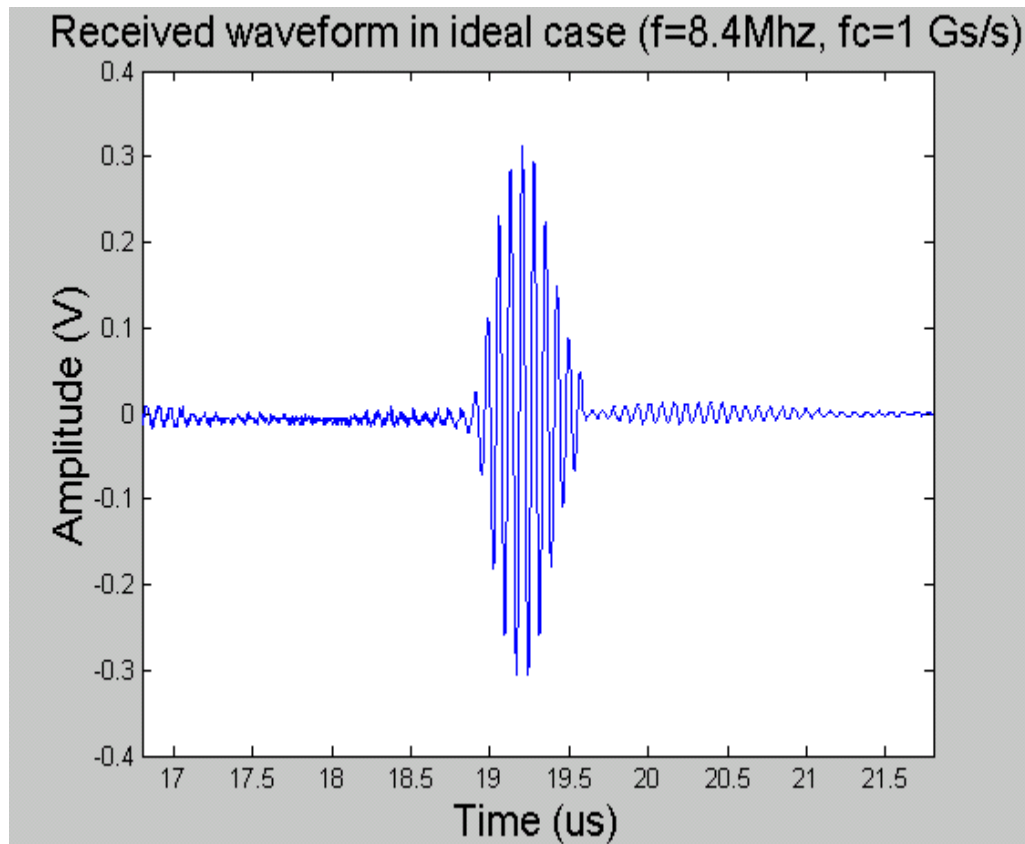
- **Denoising:** i segnali acquisiti da sensori, ricevuti via radio o su cavo ed in generale i dati generati da misurazioni di ogni tipo sono affetti da errori. Tali errori possono essere considerati come una componente di segnale, detto rumore, che si somma al segnale utile.
- Attraverso opportune tecniche di elaborazione (sia analogiche che digitali), dette appunto **tecniche di denoising**, è possibile ridurre l'effetto del rumore.

Esempi:

- Segnali di sistemi sonar e radar
- Immagini
- Valore di un titolo azionario in funzione del tempo

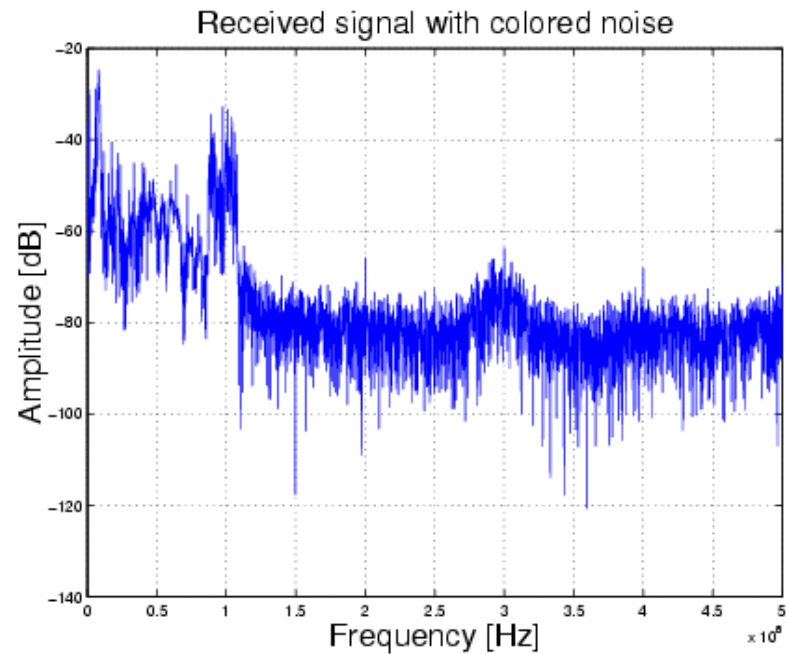
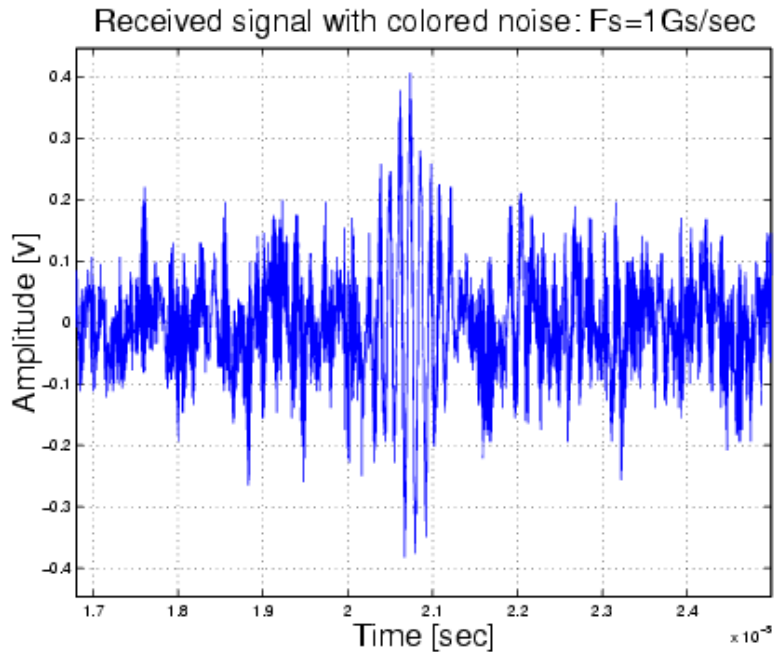
Elaborazione del segnale: esempi

Impulso inviato dal Radar



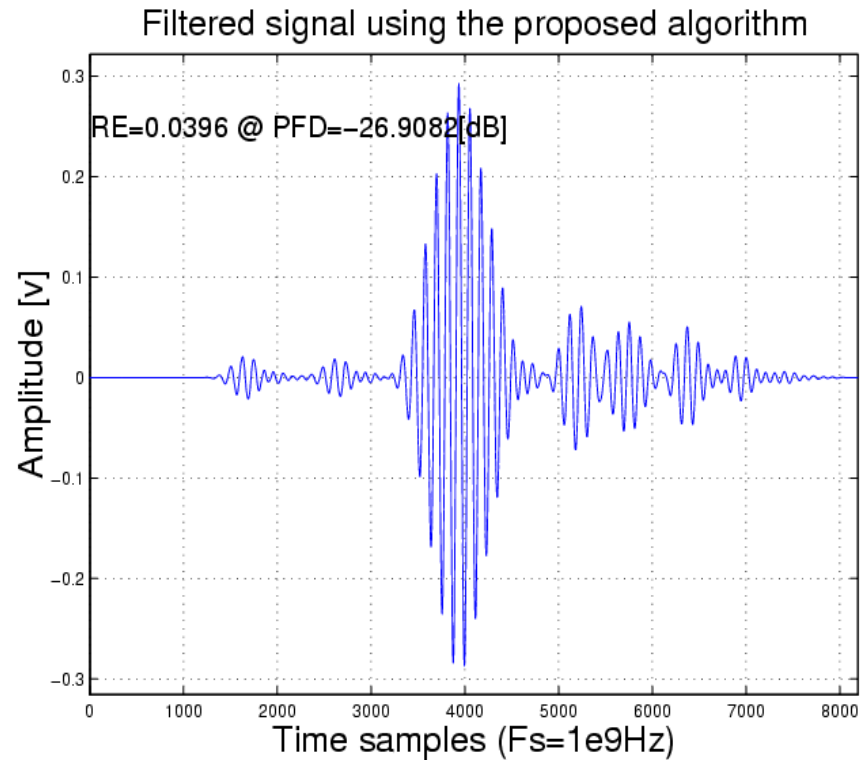
Elaborazione del segnale: esempi

Segnale ricevuto Radar corrotto da rumore



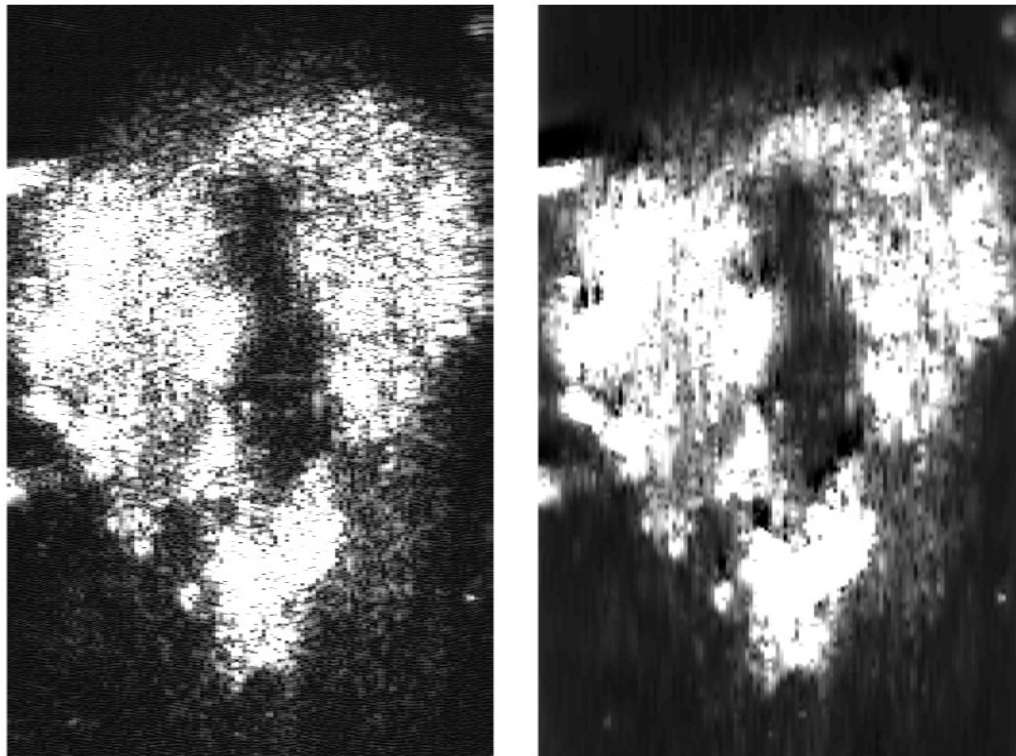
Elaborazione del segnale: esempi

Segnale ottenuto tramite elaborazione



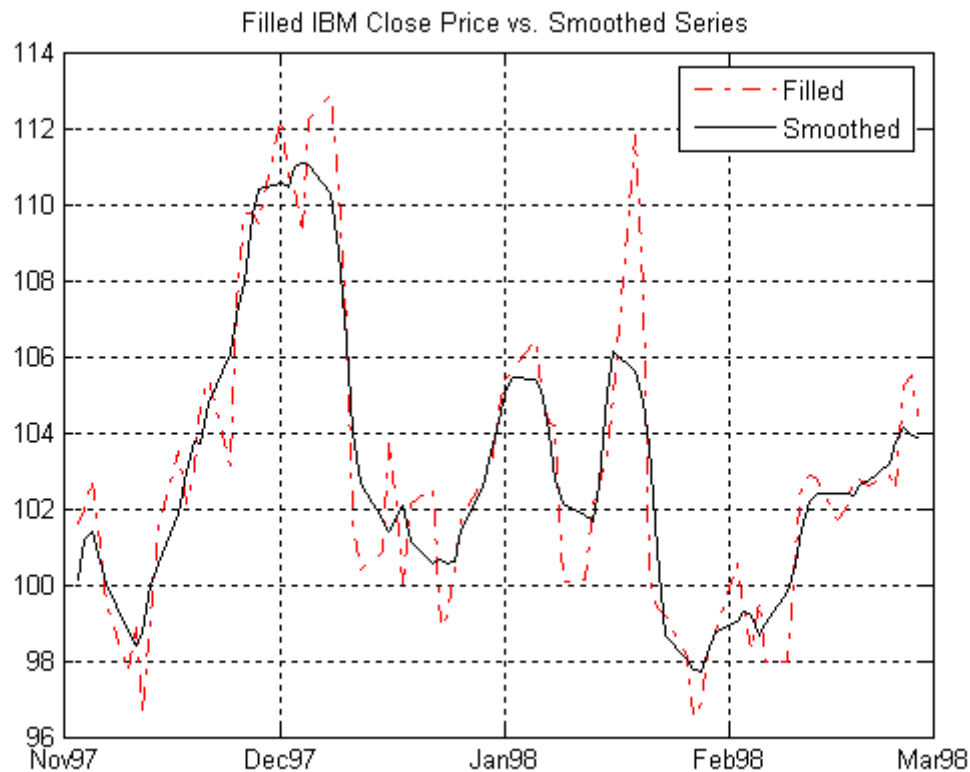
Elaborazione del segnale: esempi

Denoising di un'immagine ecografica



Elaborazione del segnale: esempi

Smoothing di serie temporali economiche



Elaborazione del segnale: esempi

- **Compressione:** la banda occupata da un segnale può essere ridotta eliminando la non ottimalità della rappresentazione dell'informazione (ridondanza), tramite opportune operazioni di codifica (codifica di sorgente) con o senza perdita di informazione.
- Tale operazione è praticamente realizzabile solo per segnali numerici.

Esempio:

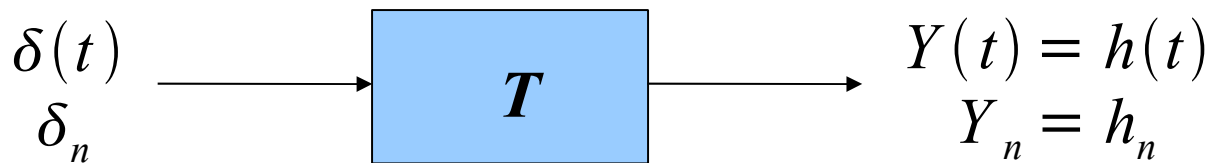
codifica audio secondo lo standard **MP3** (standard MPEG1): la codifica permette di ridurre il flusso informativo associato ad una sorgente audio (banda occupata, occupazione di memoria) di un fattore 10 con qualità accettabile (128 kbps).

Sistemi: classificazione

- In base alla natura della elaborazione effettuata, rappresentata dall'operatore $T[.]$, i sistemi, e di conseguenza le elaborazioni compiute, possono essere classificati rispetto alle seguenti proprietà:
 - Linearità: $T[ax(t)+by(t)]=aT[x(t)]+bT[y(t)]$
 - Tempo-invarianza: $T[x(t)]=y(t) \rightarrow T[x(t-t_0)]=y(t-t_0)$
 - Causalità: $T[x(t)]=y(t)$ $y(t_0)$ dipende solo da $x(t)$ per $t < t_0$
 - Assenza di memoria: $y(t_0)$ dipende solo da $x(t)$ per $t=t_0$
- Tale classificazione vale anche per sistemi tempo-discreti

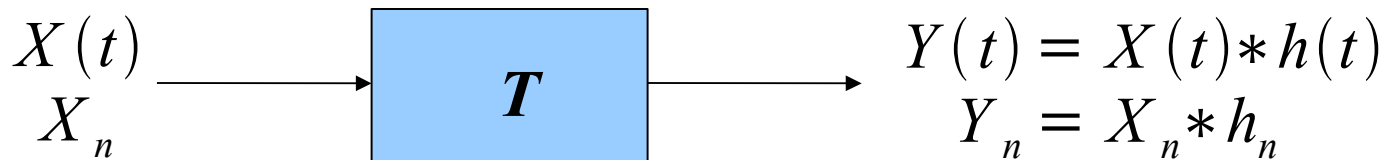
Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

- Molti sistemi fisici, dispositivi e sistemi di elaborazione sono ben modellabili come sistemi **lineari tempo-invarianti (LTI)**.
- Un sistema LTI è completamente caratterizzato dalla sua **risposta impulsiva**, ossia la risposta del sistema prodotta in seguito all'eccitazione mediante una delta di Dirac:



Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

- La risposta del sistema ad un generico segnale può infatti essere calcolata come prodotto di convoluzione tra il segnale stesso e la risposta impulsiva del sistema:



$$Y(t) = \int X(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

$$Y_n = \sum_k X_k \cdot h_{n-k}$$

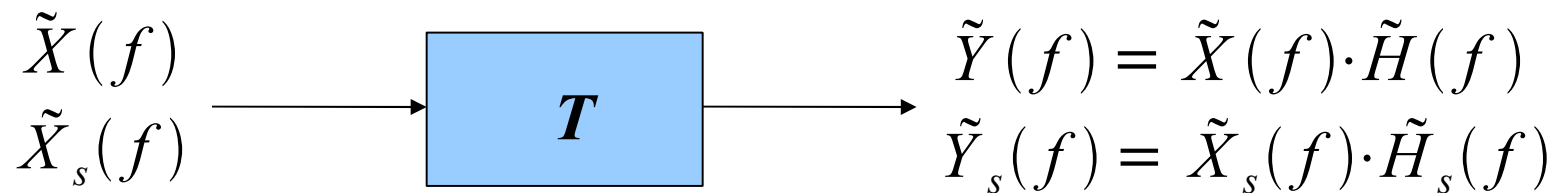
Applicazione dell'analisi di Fourier ai sistemi LTI

- E' possibile applicare l'analisi di Fourier ai sistemi LTI per studiarne le proprietà.
- Anche in questo caso, l'utilizzo di un dominio frequenziale permette una più agevole caratterizzazione delle proprietà del sistema.
- Dualmente al dominio dei tempi, nel dominio delle frequenze, un sistema è completamente caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento, ossia la trasformata di Fourier della sua risposta impulsiva:

$$\tilde{H}(f) = \mathcal{F}[h(t)]$$

Applicazione dell'analisi di Fourier ai sistemi LTI

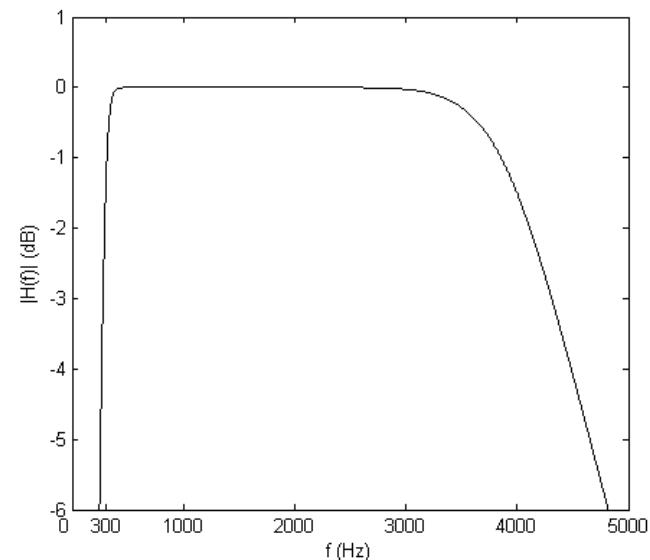
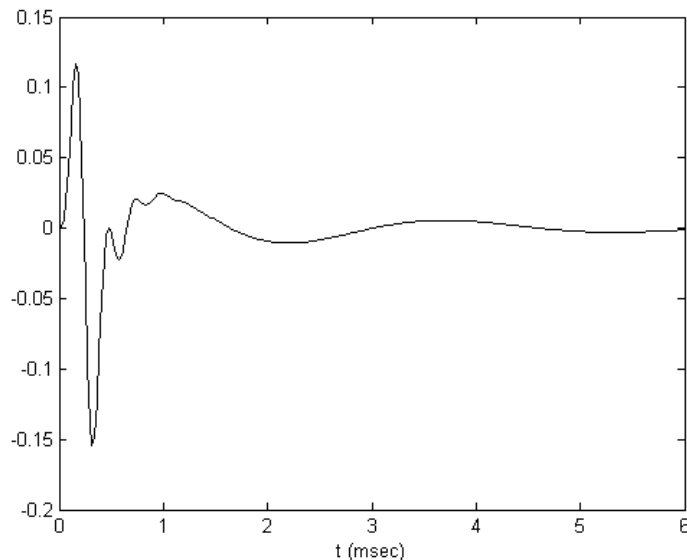
- Nel dominio delle frequenze, per le proprietà della trasformata di Fourier, la trasformata della risposta del sistema ad un generico segnale, può essere calcolata come prodotto tra la trasformata del segnale e la funzione di trasferimento del sistema:



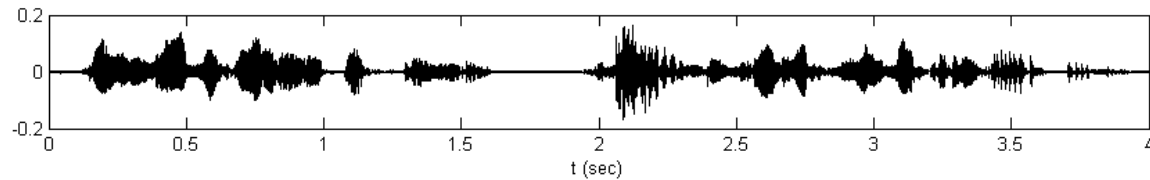
Applicazione dell'analisi di Fourier ai sistemi LTI

- Analogamente al caso dei segnali, le proprietà di un sistema LTI nel dominio delle frequenze possono essere studiate osservando lo spettro di ampiezza e di fase della funzione di trasferimento.

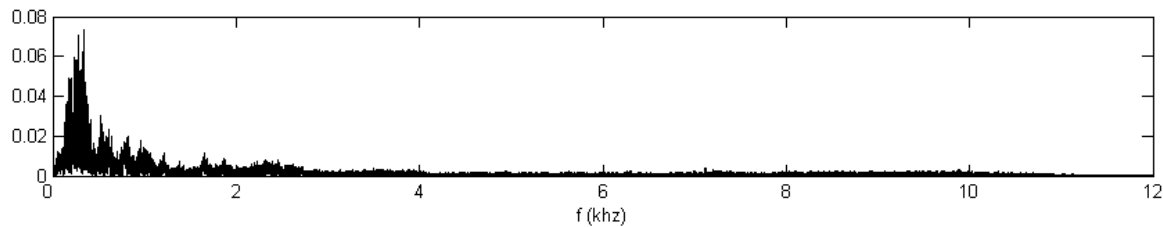
Esempio: Filtro passa-banda di Butterworth



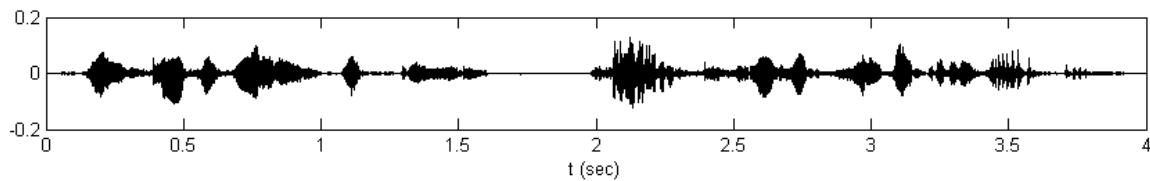
Esempio: filtraggio di un segnale vocale



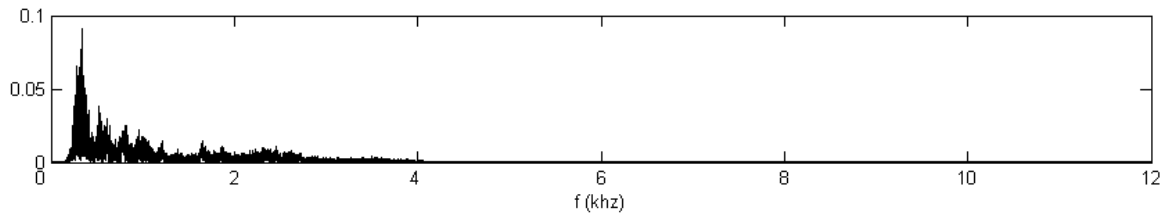
Segnale Vocale



Spettro Segnale Vocale

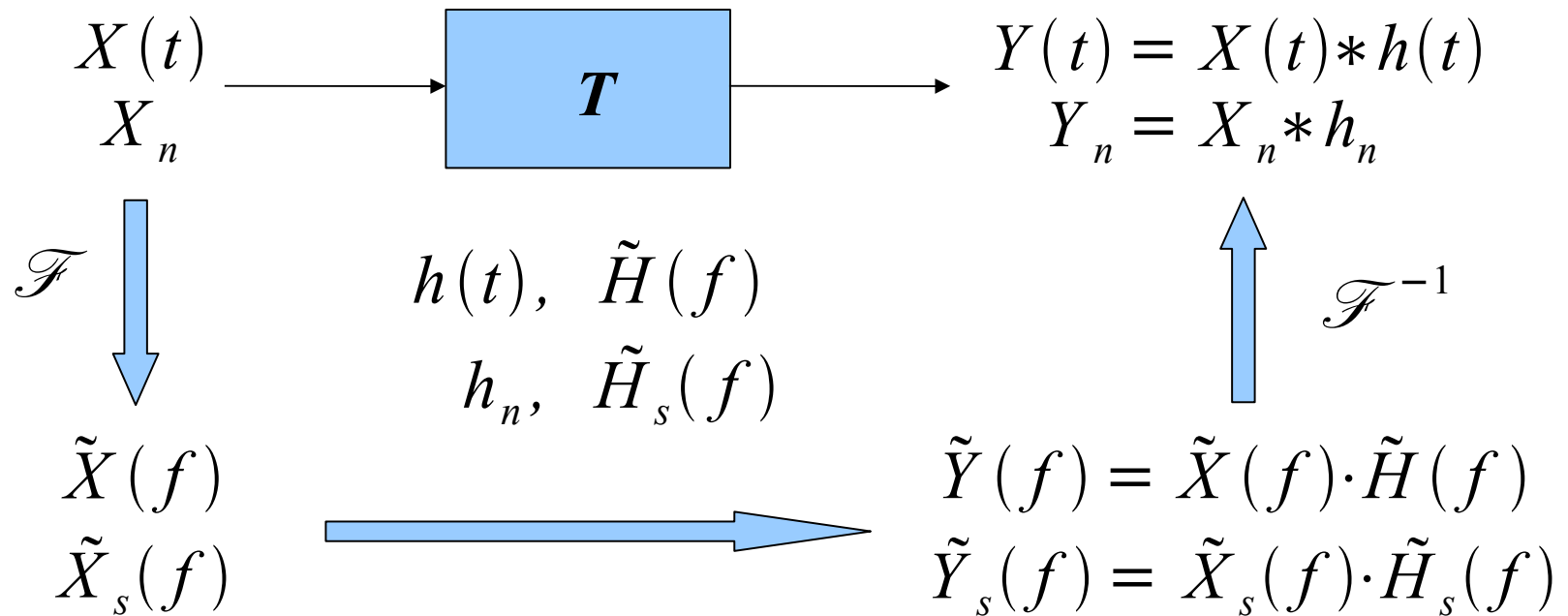


Segnale Vocale Filtrato



Spettro Segnale Vocale Filtrato

Analisi dei sistemi LTI



Elaborazione del segnale

- Nel caso di segnali analogici, il contenuto informativo è rappresentato dai valori che il segnale fisico può assumere e pertanto varia con continuità all'interno della dinamica del segnale.
- L'elaborazione del segnale coincide con l'elaborazione dell'informazione che esso trasporta.
- Nel caso di segnali numerici e digitali, il contenuto informativo è ancora rappresentato dai valori che il segnale fisico può assumere, ma in questo caso i valori significativi sono però un insieme finito.
- L'elaborazione dell'informazione può o meno coincidere con l'elaborazione del segnale.

Elaborazione del segnale

- Si parla quindi **elaborazione analogica** del segnale o dell'informazione, quando si agisce direttamente sul segnale fisico.

L'elaborazione analogica tratta quindi segnali tempo-continui e continui nei valori.

- Si parla di **elaborazione numerica** o digitale dell'informazione, quando si agisce sull'informazione estratta dal segnale fisico che la trasportava.

L'elaborazione numerica tratta quindi intrinsecamente segnali tempo discreti e discreti nei valori.

Elaborazione analogica: limiti

- Nel caso di segnali analogici, poiché l'elaborazione dell'informazione è realizzata modificando direttamente il segnale fisico, è necessario costruire circuiti in grado di agire direttamente su di esso e realizzare le elaborazioni volute.
- Ciò implica che l'elaborazione realmente effettuata sul segnale, dipenderà dalle reali caratteristiche e dalle limitazioni fisiche del circuito elettronico utilizzato e quindi
 - dalle imperfezioni costruttive dei componenti circuito;
 - dalla deriva dei parametri dei componenti del circuito dovuti all'invecchiamento e alle condizioni operative del circuito;

Elaborazione analogica: limiti

- Un ulteriore fattore limitante dei circuiti di elaborazione analogica è il **rumore**, ossia l'insieme di disturbi dovuti ai fenomeni fisici (es. agitazione termica) presenti nei circuiti e alle interferenze esterne, che si vanno a sommare al segnale utile degradandone la qualità.
- Una cifra di merito utilizzata per quantificare la qualità di un segnale analogico è il **rapporto segnale rumore (SNR)**:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_U}{P_N} \right)$$

P_U = Potenza del segnale utile

P_N = Potenza del rumore

Elaborazione analogica: limiti

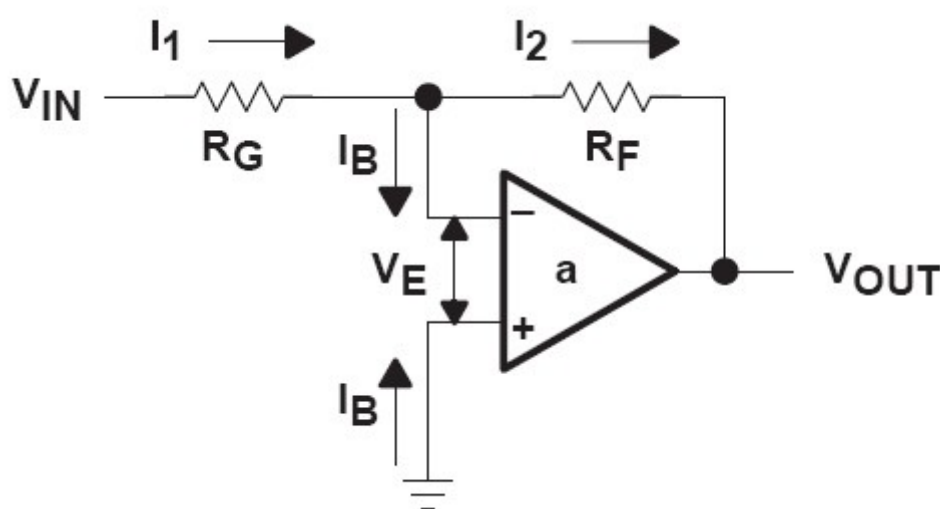
- In base al tipo di segnale e di applicazione, affinché il segnale abbia qualità accettabile il SNR deve essere maggiore di una soglia minima:
 - conversazione telefonica: $\text{SNR} > 25 - 30 \text{ dB}$
 - Audio Hi-Fi: $\text{SNR} > 60 \text{ dB}$
- I circuiti elettronici, oltre ad essere soggetti alle interferenze presenti nell'ambiente di lavoro, sono costituiti da componenti intrinsecamente rumorosi (resistenze, transistor) che contribuiscono al degrado della qualità del segnale.

Sommatore analogico

- ESEMPIO: Realizzazione di un Sommatore Analogico

Elemento base:

amplificatore operazionale in configurazione invertente



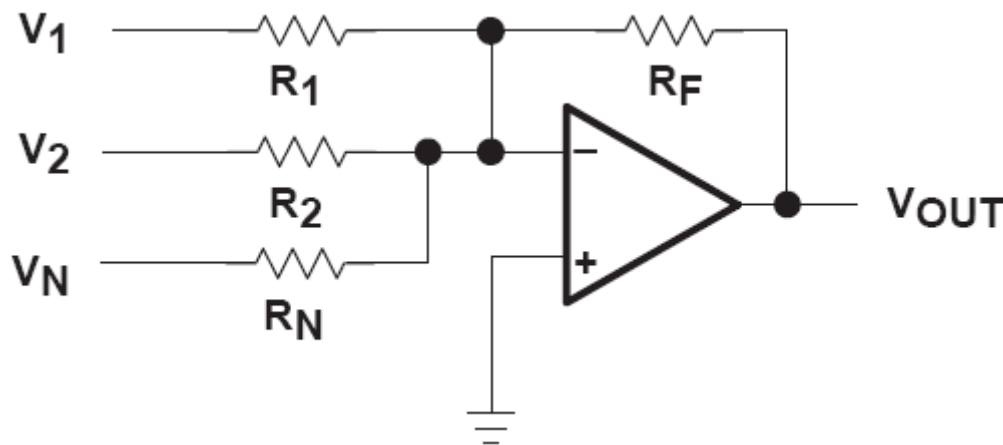
$$I_1 = \frac{V_{IN}}{R_G} = -I_2 = -\frac{V_{OUT}}{R_F}$$

$$V_{OUT} = -\frac{R_F}{R_G} V_{IN}$$

Sommatore analogico

- ESEMPIO: Realizzazione di un Sommatore Analogico

Applicazione:
sommatore a più ingressi



$$V_{OUTN} = -\frac{R_F}{R_N} V_N$$

$$V_{OUT1} = -\frac{R_F}{R_1} V_1$$

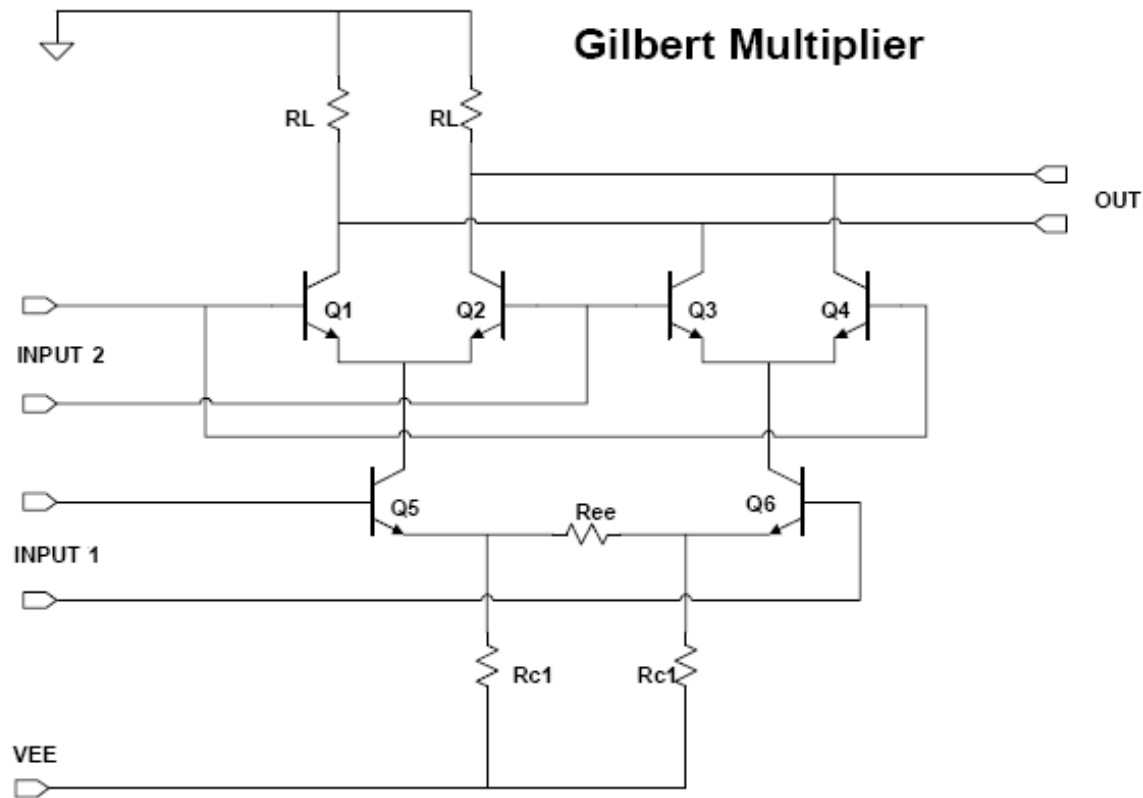
$$V_{OUT2} = -\frac{R_F}{R_2} V_2$$

$$V_{OUT} = -\left(\frac{R_F}{R_1} V_1 + \frac{R_F}{R_2} V_2 + \frac{R_F}{R_N} V_N\right)$$

Sommatore analogico: problemi

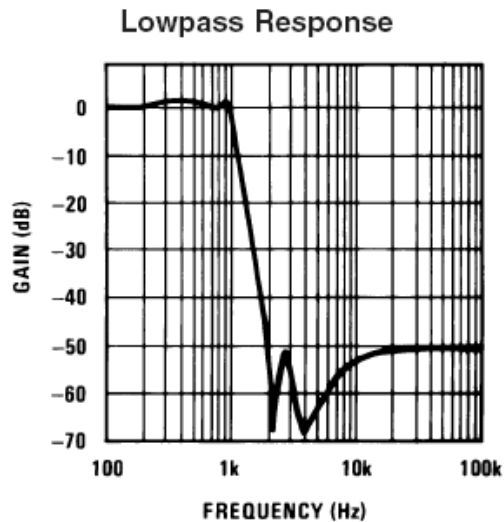
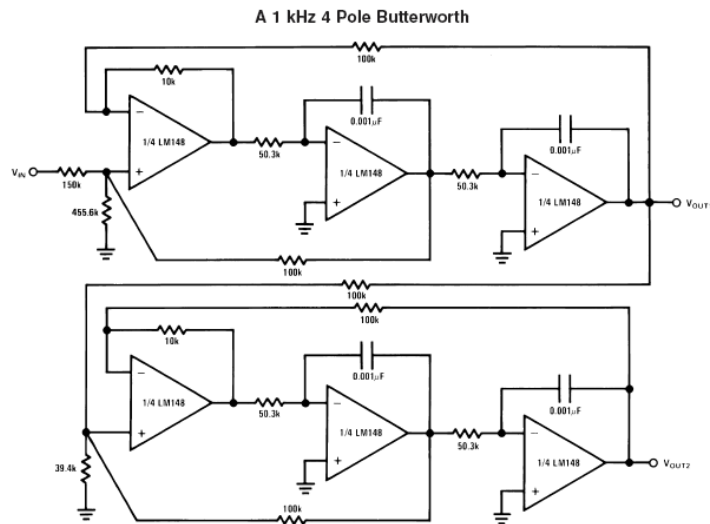
- La funzione di somma così realizzata risente delle seguenti limitazioni:
 - **BANDA LIMITATA:** la larghezza di banda dei segnali di ingresso è limitata dalle caratteristiche dell'amplificatore operazionale.
 - **DINAMICA LIMITATA:** l'ampiezza del segnale di ingresso è limitata dalla tensione di alimentazione del circuito e dal dispositivo usato.
 - **PRECISIONE:** le resistenze e l'amplificatore operazionale introducono rumore sui segnali.

Moltiplicatore analogico



Design di un filtro analogico

- Il progetto di un filtro analogico consiste nella scelta di una topologia circuitale e nel dimensionamento dei suoi componenti (resistenze, induttori, condensatori, componenti attivi), allo scopo di ottenere lo spettro di ampiezza voluto.
- **Esempio:** filtro passa basso di Butterworth di ordine 4

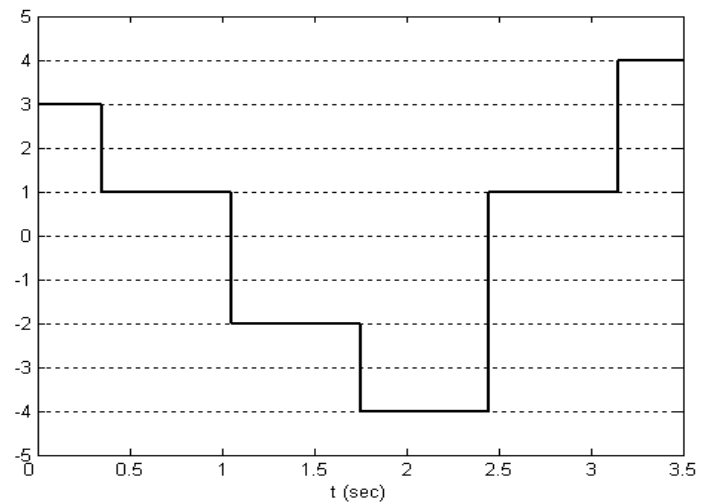
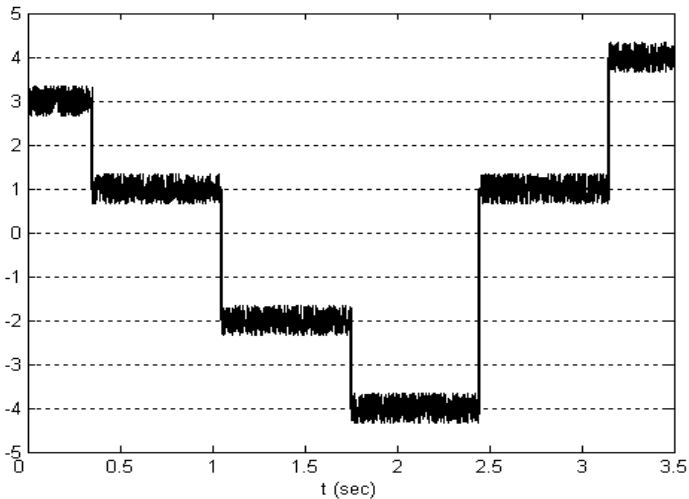


Elaborazione numerica

- Le problematiche evidenziate, suggeriscono la necessità di sviluppare tecniche di rappresentazione dell'informazione e tecniche di elaborazione, che siano immuni o meno sensibili alle problematiche evidenziate.
- In primo luogo è necessario ridurre i gradi di libertà temporali del segnale, spostandosi da un dominio tempo continuo a un dominio tempo-discreto.
- In questo modo l'elaborazione dell'informazione può essere svincolata dall'elaborazione del segnale fisico e realizzata tramite sistemi di calcolo tempo discreti (es: calcolatore elettronico).

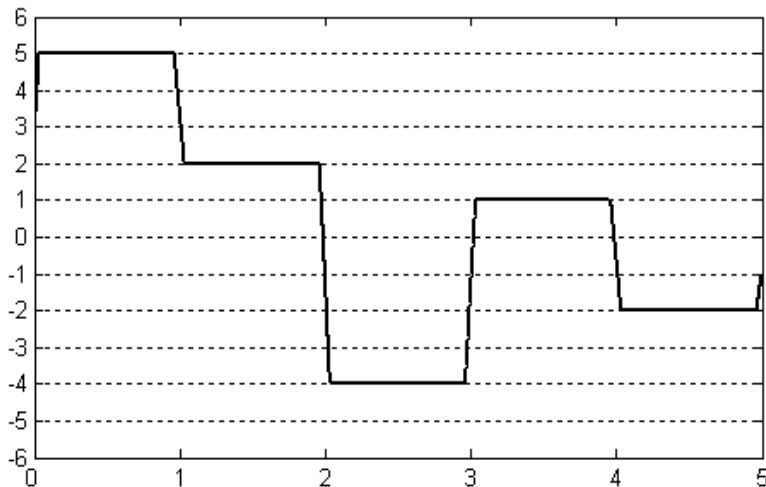
Elaborazione numerica

- In secondo luogo è necessario ridurre i gradi di libertà che l'informazione può assumere. L'informazione non può quindi più essere continua, ma bensì discreta. In questo modo essa diviene intrinsecamente più robusta nei confronti del rumore.



Elaborazione numerica

- Il passaggio da tempo continuo e continuo nei valori a segnale tempo discreto e discreto nei valori è naturale per segnali fisici che trasportano informazione intrinsecamente tempo-discreta e discreta nei valori, come nel caso del segnale PAM.



→ 3, 1, -2, -4, 1, 4

Conversione Analogico Digitale

- I segnali di interesse applicativo, spesso ottenuti tramite sensori, sono nella maggior parte dei casi analogici e l'informazione da essi trasportata e contenuta nella forma d'onda del segnale stesso.
- E' pertanto necessario definire una trasformazione che permetta di ottenere un segnale tempo-discreto e discreto nei valori a partire da un segnale analogico.
- Tale operazione deve essere reversibile rispetto ad alcuni parametri di qualità.

Conversione Temporale: campionamento

- La conversione di un segnale reale analogico continuo nei valori e tempo continuo $S(t)$ in un segnale tempo-discreto e discreto nei valori è realizzata tramite l'operazione di **campionamento**

$$S(t) \rightarrow S_n = S(nT_s)$$

T_s = tempo di campionamento

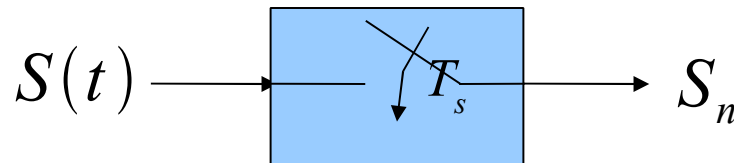
$$f_s = \frac{1}{T_s} = \text{frequenza di campionamento}$$

Campionamento

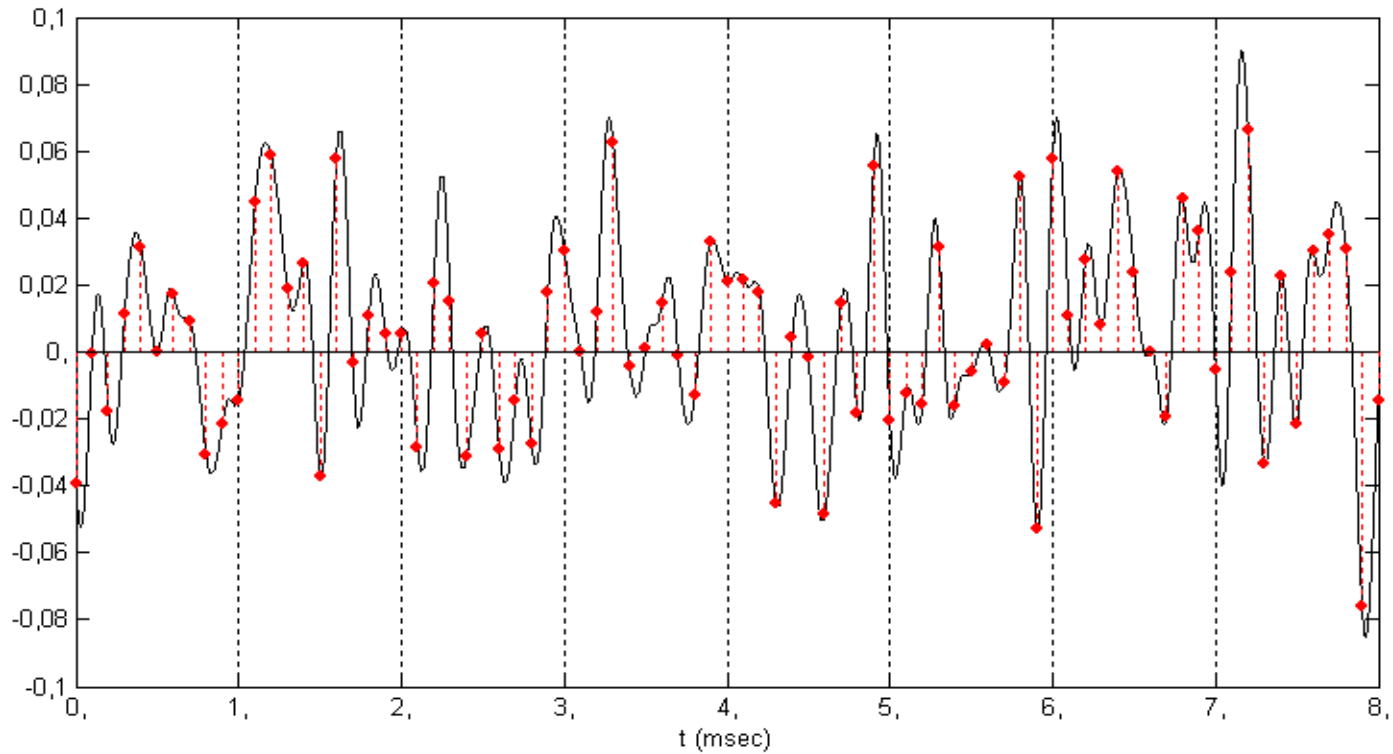
- Matematicamente il campionamento ideale di un segnale può essere rappresentato come la convoluzione del segnale stesso con una delta di Dirac ripetuta periodicamente

$$S_n = \int S(t) \delta(t - nT_s) dt$$

- Fisicamente viene realizzata tramite un circuito elettronico denominato **campionatore**, che nel caso di campionamento ideale, può essere pensato come un interruttore ideale con tempo di commutazione nullo, che si chiude frequenza f_s .



Campionamento



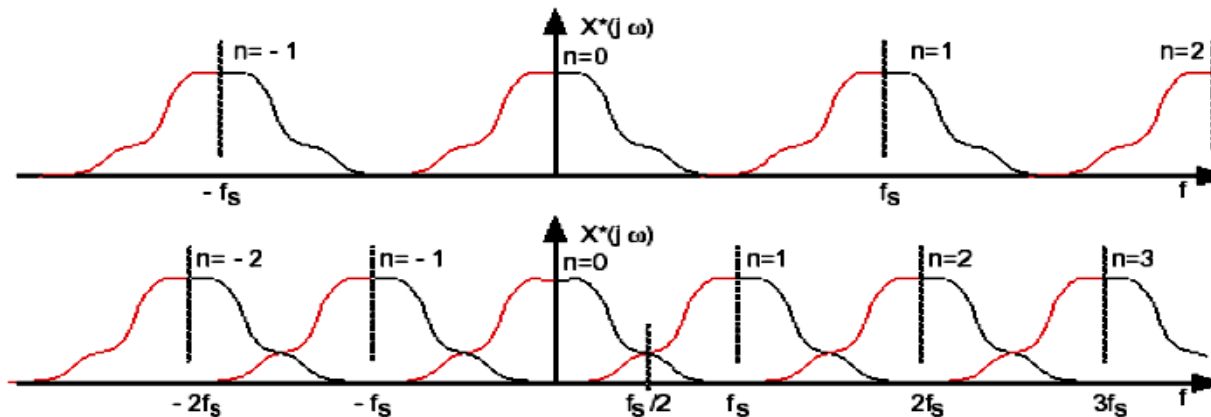
$$T_s = 10 \mu\text{s} \longrightarrow f_s = 100 \text{ kHz}$$

Campionamento: invertibilità

- Ci domandiamo ora se l'operazione di campionamento è invertibile e quali condizioni ne garantiscono l'invertibilità.
- Come visto in precedenza, un campionamento nel dominio dei tempi con passo T_s , corrisponde ad una ripetizione periodica dello spettro del segnale con passo f_s nel dominio delle frequenze.
- Pertanto, se la frequenza di campionamento f_s non è sufficientemente elevata, si avrà una ripetizione periodica con sovrapposizione dello spettro del segnale (aliasing).

Campionamento: invertibilità

- Tale sovrapposizione fa sì che la sequenza di origine non sia più univocamente determinabile e causa quindi una **perdita di informazione**.
- In particolare, le frequenze superiori a $f_s / 2$ non sono rappresentate correttamente, poiché “sporcate” (distorte) dalle componenti che si sovrappongono ad esse.



Teorema del campionamento di Shannon

- L'operazione di campionamento temporale di un segnale $S(t)$ passa basso con spettro nullo per $|f| < f_m$ è reversibile se la frequenza di campionamento f_s soddisfa la relazione

$$f_s \geq 2f_m$$

- Per soddisfare il teorema di Shannon è pertanto necessario individuare l'intervallo di frequenze utile del segnale da convertire, scegliere una frequenza di campionamento f_s adeguata e filtrare il segnale in modo da eliminare qualsiasi componente spettrale avente frequenza $f > f_s/2$.

Campionamento

- Il flusso informativo di un segnale campionato, denominato **symbol rate** (R_s), è quindi tanto più elevato quanto più la banda del segnale stesso è elevata.
- Dualmente, l'occupazione di banda di un segnale tempo-discreto sarà proporzionale al R_s del segnale stesso.

Alcuni esempi:

Segnale telefonico: Banda = [300, 3400 Hz] - $f_s = 4$ kHz

Segnale Audio CD: Banda = [20, 20000 Hz] - $f_s = 44.1$ kHz

Segnale Ecografico: Banda = [1, 20 Mhz] - $f_s = 45$ MHz

Campionamento: invertibilità

- Il campionamento è quindi teoricamente una operazione completamente invertibile se soddisfatte le condizioni del teorema di Shannon.
- Il campionamento viene effettuato tramite circuiti elettronici reali e quindi soggetti ai problemi tipici dei circuiti analogici.
- La reale efficienza dell'invertibilità dell'operazione di campionamento dipende quindi dalle prestazioni dei circuiti.