Dispense del corso di

Elettronica L

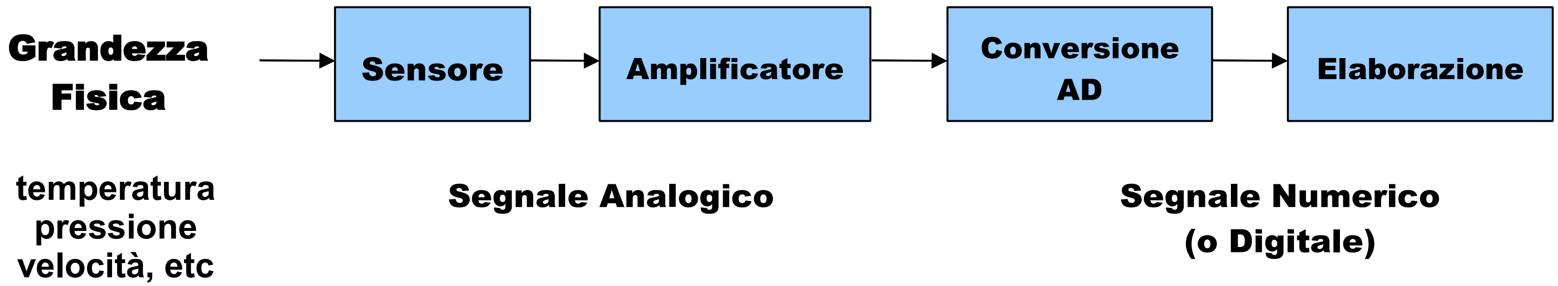
Prof. Guido Masetti

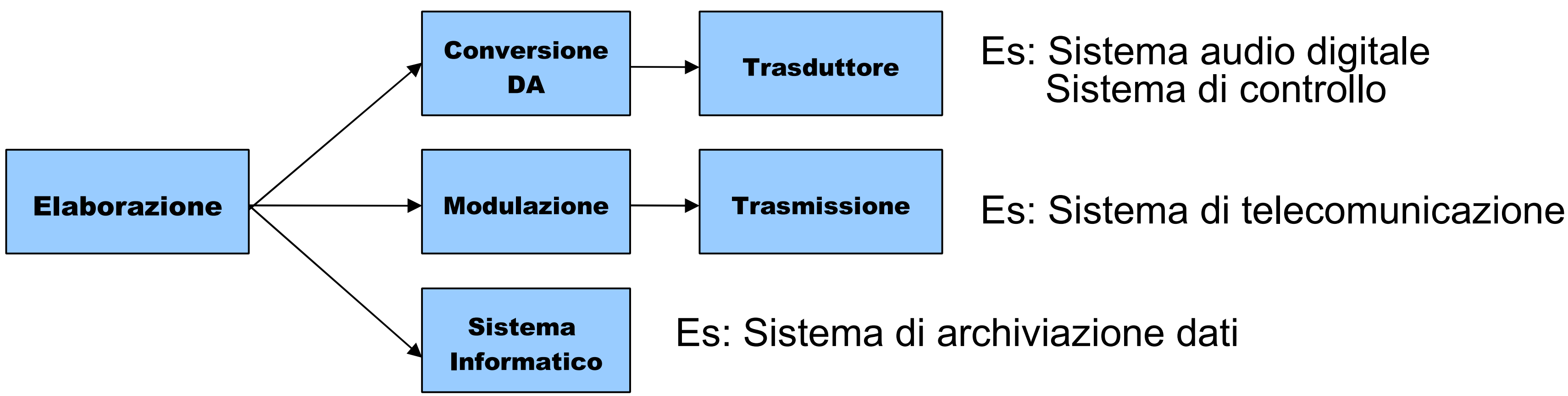
Teoria dei Segnali e Sistemi

Sommario

- Architettura dei sistemi per l'elaborazione dell'informazione
- Informazione e segnali
- Teoria dei segnali
- Analisi di Fourier

Sistemi per l'elaborazione dell'informazione

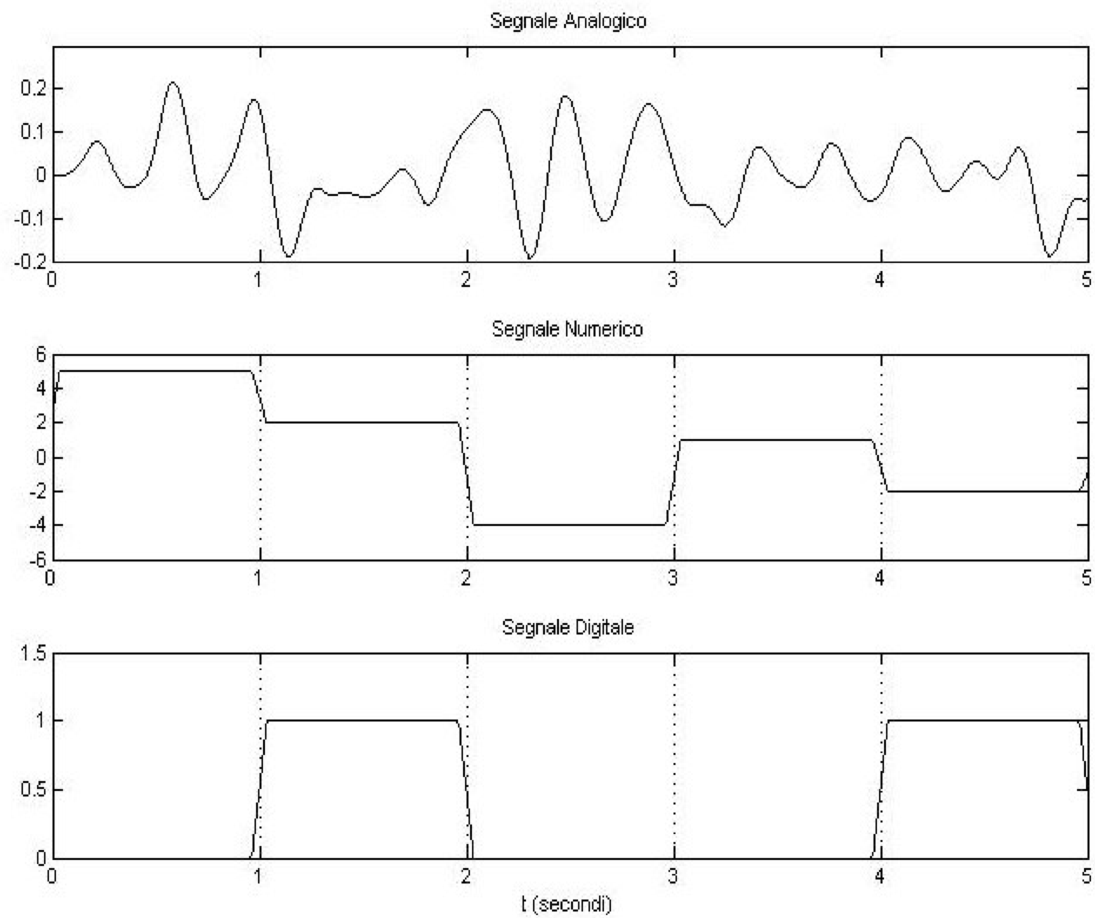




Informazione e segnali

- **SEGNALE (Fisico)**: grandezza fisica di natura elettrica (tensione, corrente), che funge da supporto per la rappresentazione dell'informazione.
- L'informazione può essere di due tipi:
  ANALOGICA: può assumere un numero infinito di valori
  NUMERICA: può assumere un numero discreto di valori
- In base al tipo di informazione contenuta nel segnale esso viene denominato ANALOGICO o NUMERICO.
- Un segnale fisico è quindi matematicamente rappresentato da una funzione tempo continua *S(t)* indipendentemente dall'informazione in esso contenuta.

Informazione e segnali (II)



Esempi:

Sistema telefonico tradizionale
Sistema televisivo tradizionale
Segnale Ecografico

Sistema telefonico numerico (PCM)
Sistema televisivo digitale (Digitale terrestre)

Sistema telegrafico
Calcolatore elettronico

Teoria dei segnali

- Il concetto di segnale (matematico) è quindi una astrazione che permette di studiare le proprietà (contenuto informativo) di grandezze fisiche che variano nel tempo, da un punto di vista analitico (**Teoria dei Segnali**).

- In quest'ambito distinguiamo tre tipi di segnale:
  - Segnali tempo-continui e continui nei valori
  - Segnali tempo-discreti e continui nei valori
  - Segnali tempo-discreti e discreti nei valori

Teoria dei segnali

- **Segnale tempo continuo e continuo nei valori**: funzione *S* che associa ad ogni istante di tempo *t,* un valore reale.

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow S(t)$$

- I segnali di interesse ingegneristico sono *limitati:*

$$S_{min} \leq S(t) \leq S_{max}$$

Un segnale tempo continuo può quindi assumere infiniti valori all'interno di un intervallo limitato. E' la rappresentazione matematica di un segnale analogico.

Teoria dei segnali

- **Segnale tempo discreto e continuo nei valori**: funzione *S* che associa ad ogni istante di tempo discreto *n,* un valore reale.

$$S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow S_n$$

- E' la rappresentazione matematica di un segnale ottenuto come *campionamento* di un segnale tempo continuo, o di una sorgente intrinsecamente tempo discreta che genera valori reali.

  (Es: valori delle quotazioni di un titolo azionario).

Teoria dei segnali

- **Segnale tempo discreto e discreto nei valori**: funzione *S* che associa ad ogni istante di tempo discreto *n,* un simbolo appartenete ad un alfabeto finito $\chi = [S_1, \ldots, S_L]$ composto da L simboli reali.

$$S : \mathbb{Z} \rightarrow \chi$$

$$n \rightarrow S_n \in \chi$$

- E' la rappresentazione matematica di un segnale ottenuto come *campionamento* e *quantizzazione* di un segnale tempo-continuo, oppure di una sorgente intrinsecamente tempo discreta che genera valori appartenenti ad un alfabeto finito.

Es: calcolatore elettronico, segnale telegrafico, sequenza di lanci di un dado

Teoria dei segnali

- **Esempio**: segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation)

$$S(t)=\sum_n a_n g(t-nT)$$ → **Segnale Fisico:** segnale tempo continuo e continuo nei valori

$g(t)$ = impulso di modulazione

$a_n \in \mathbb{R}$ = sequenza modulante → **Contenuto Informativo**: segnale tempo discreto continuo o discreto nei valori

- Nel segnale PAM l'informazione è intrinsecamente tempo discreta ed è contenuta nell'ampiezza dei coeffeicienti della sequenza modulante a_n .
- L'impulso di modulazione *g(t)* funge da supporto per l'informazione contenuta nella sequenza modulante.

Teoria dei segnali: analisi di Fourier

- I segnali fino ad ora definiti, sono rappresentati nel dominio del tempo, ma non sempre questa rappresentazione è efficace per l'analisi delle loro proprietà.
- Un vettore può essere rappresentato attraverso varie basi.
- La scelta della base viene fatta in base alle caratteristiche che la rappresentazione deve mettere in evidenza.
- Come per i vettori è possibile definire cambiamenti di base per funzioni e quindi per i segnali.
- Un cambiamento di base significativo per i segnali è quello dato dall'analisi di Fourier.

Analisi di Fourier: serie di Fourier

- Consideriamo un segnale tempo continuo e continuo nei valori *S(t),* periodico di periodo *T.* Sotto alcune condizioni *S(t)* può essere rappresentato come combinazione delle funzioni esponenziali complesse:

$$S(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad f_0 = 1/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T S(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

- Il segnale S(t) è rappresentato come somma di fasori rotanti a frequenze multiple di f_0. Il coefficiente generico c_n è associato alla sinusioide di frequenza nf_0 e rappresenta la *somiglianza* tra il segnale e la sinusoide stessa.

Serie di Fourier: proprietà

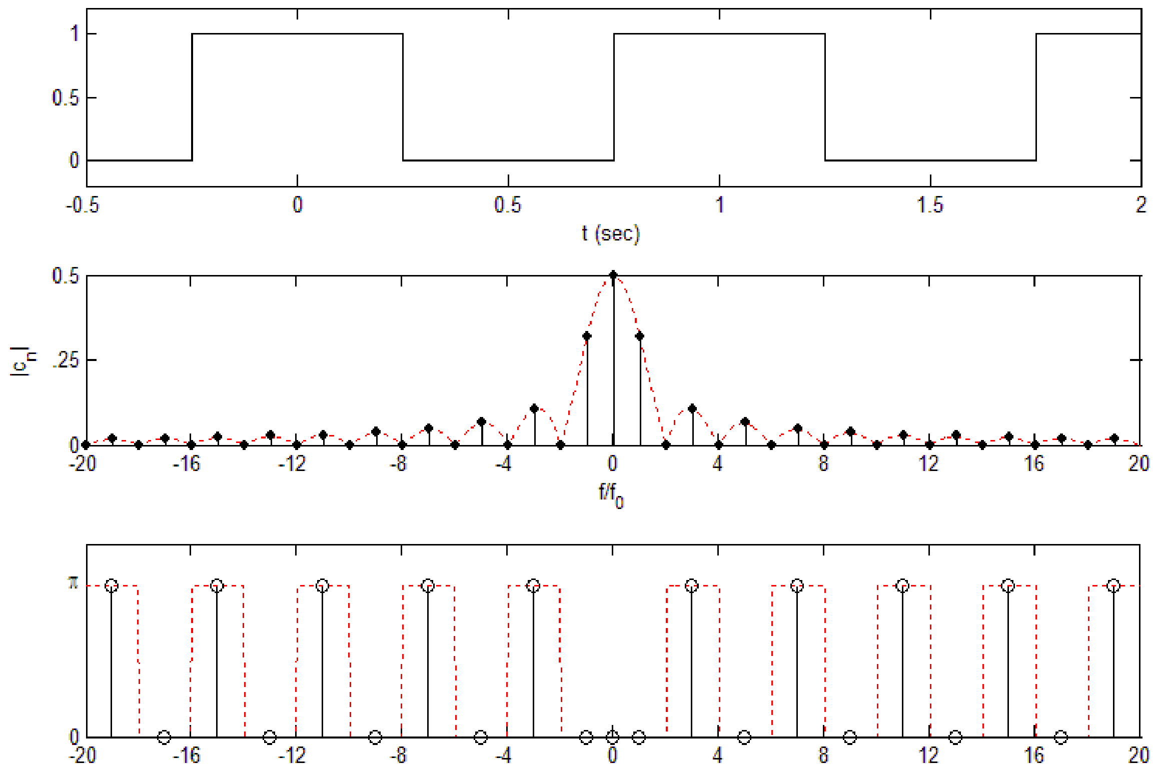
- La frequenza $f_0=1/T$ è detta **frequenza fondamentale** del segnale S(t).
- La serie stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni periodiche nel dominio del tempo e i relativi coefficienti c_n nel dominio della frequenza (discreto).
- Un segnale periodico viene rappresentato da un'infinità numerabile di coefficienti nel dominio della frequenza, ovvero ha un'infinità numerabile di gradi di libertà.
- L'insieme dei coefficienti c_n viene detto **spettro a righe** del segnale periodico. Tali coefficienti complessi vengono generalmente rappresentati tramite ampiezza e fase, ottenendo rispettivamente lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase** del segnale.

Serie di Fourier: esempi

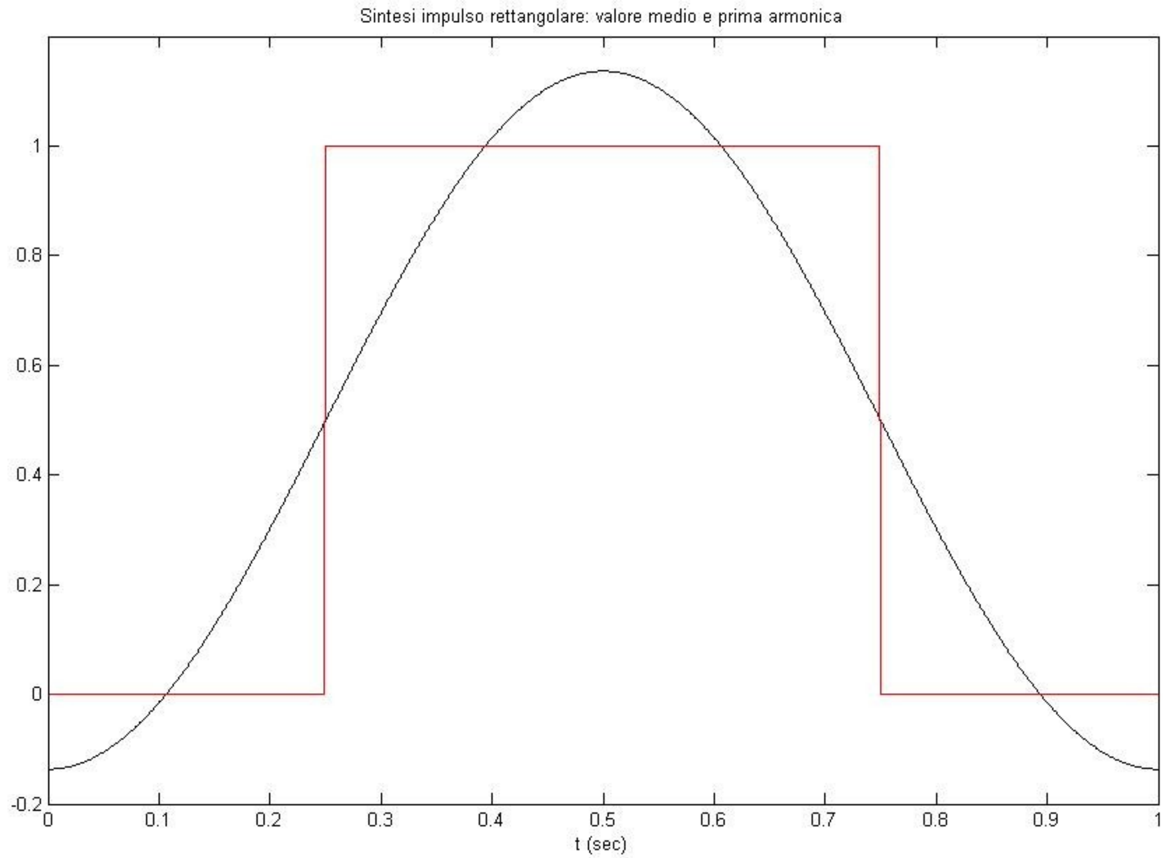
Segnale

Spettro di ampiezza

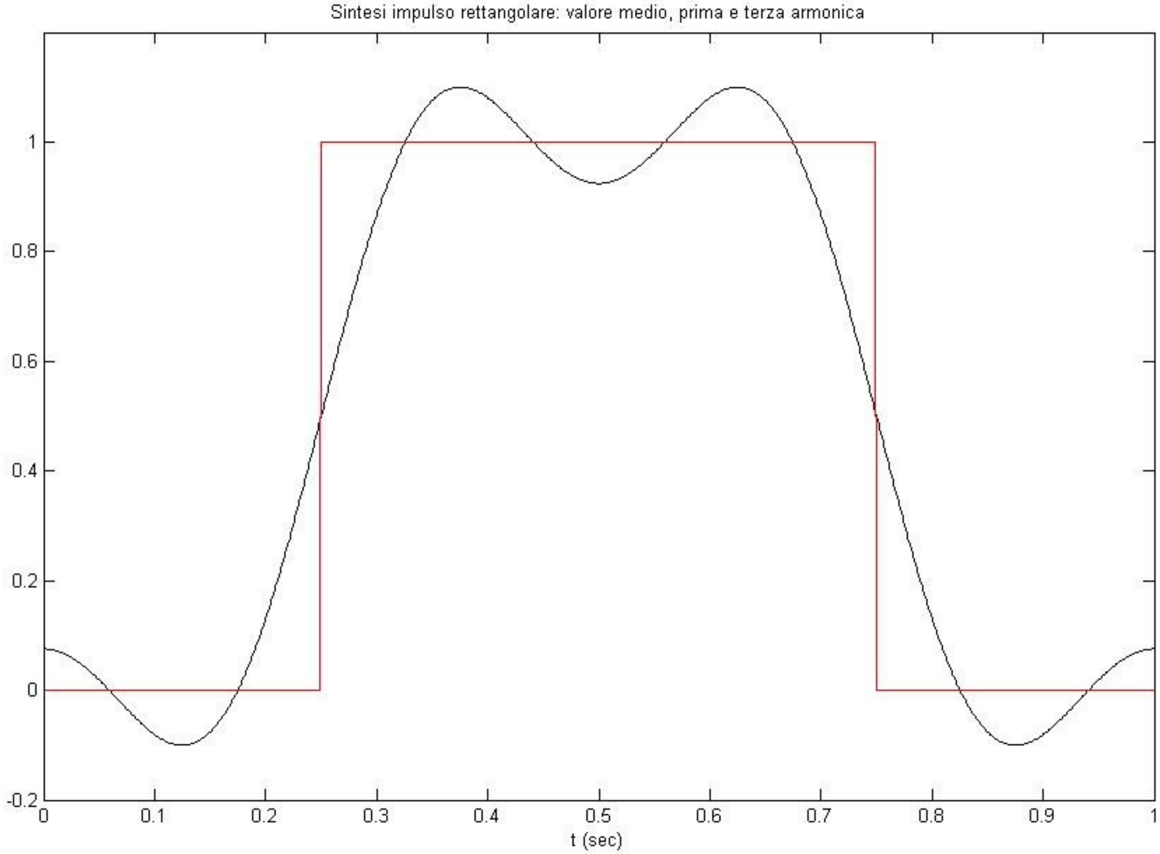
Spettro di fase



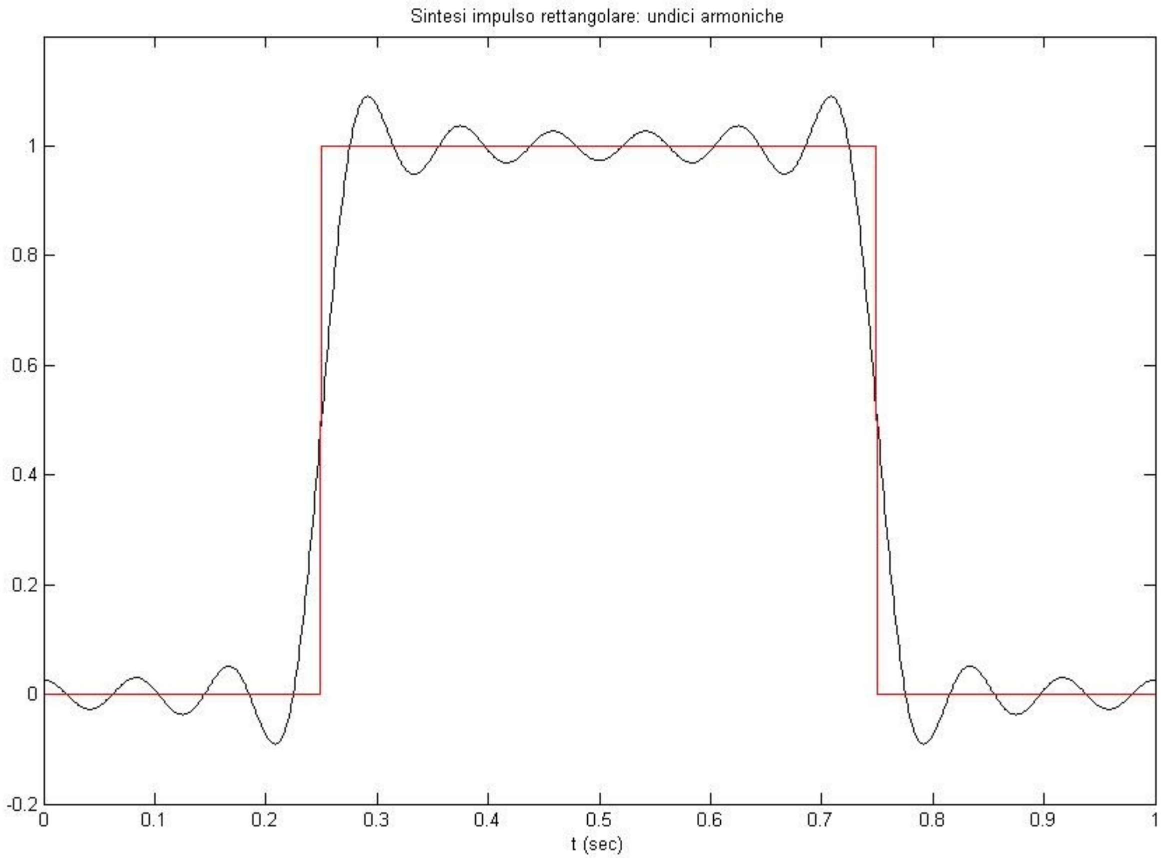
Serie di Fourier: esempi



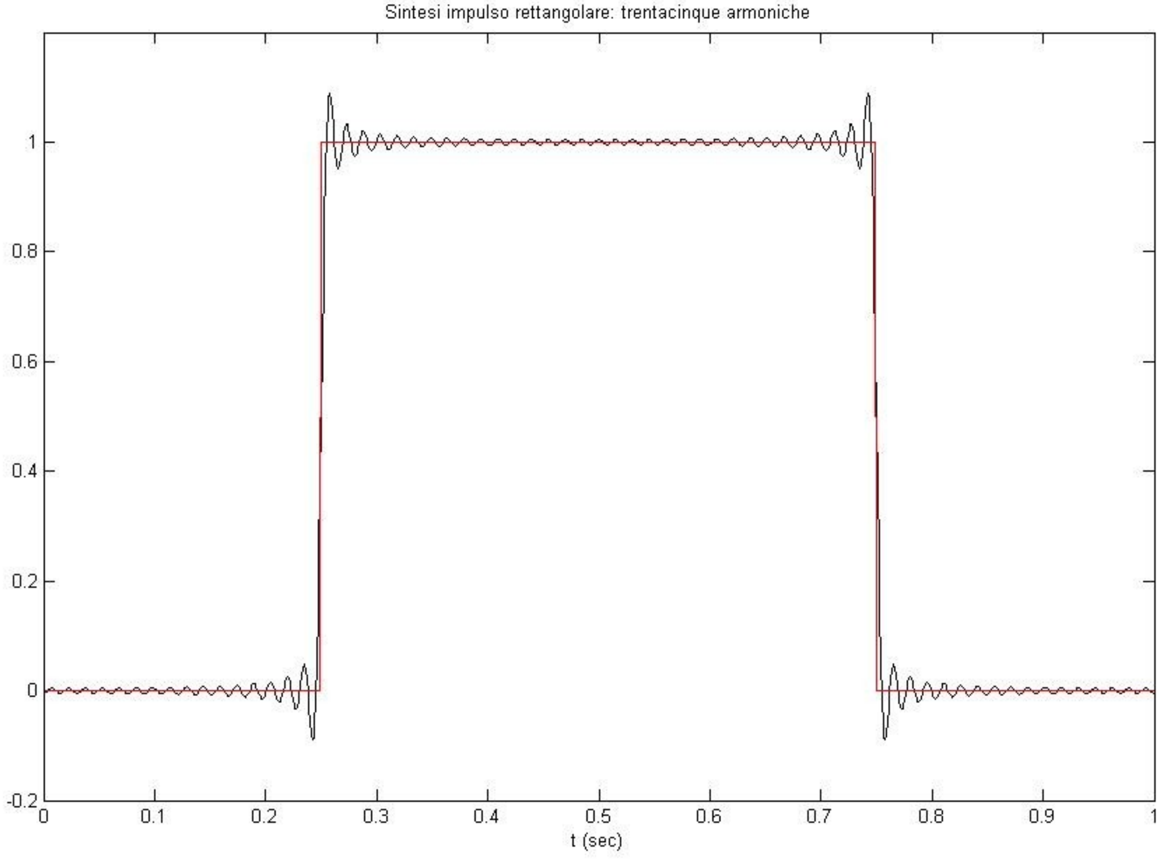
Serie di Fourier: esempi



Serie di Fourier: esempi



Serie di Fourier: esempi

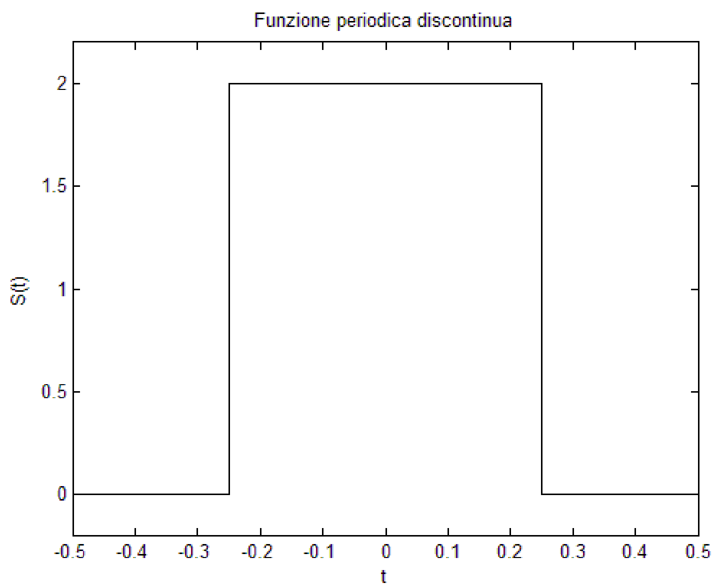


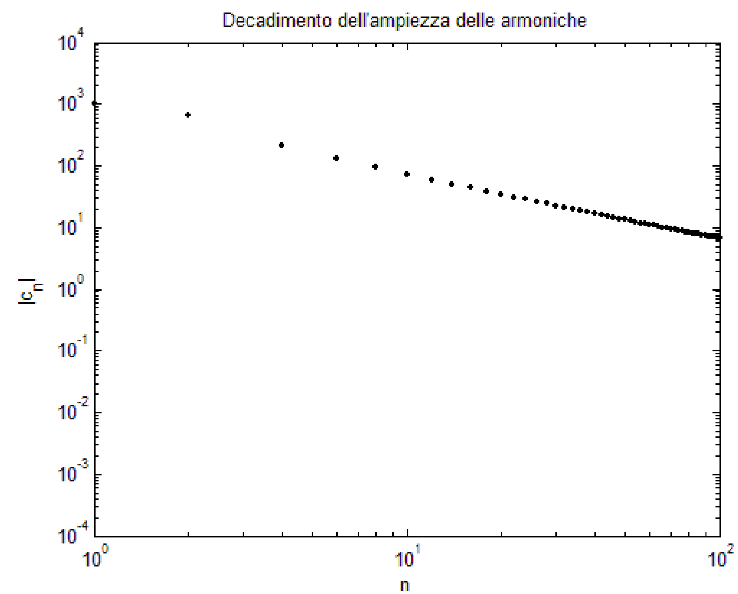
Banda di un segnale periodico reale

- Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale, prevede teoricamente infiniti termini.
- I segnali reali di interesse applicativo devono essere necessariamente costituiti da un numero finito di componenti armoniche.
- Si definisce quindi **banda** di un segnale periodico reale l'intervallo sul semiasse positivo delle frequenze ove lo spettro di ampiezza è significativamente diverso da zero. La sua misura B è detta **larghezza di banda.**
- I segnali di interesse applicativo sono quindi segnali a **banda limitata**.

Banda di un segnale periodico reale

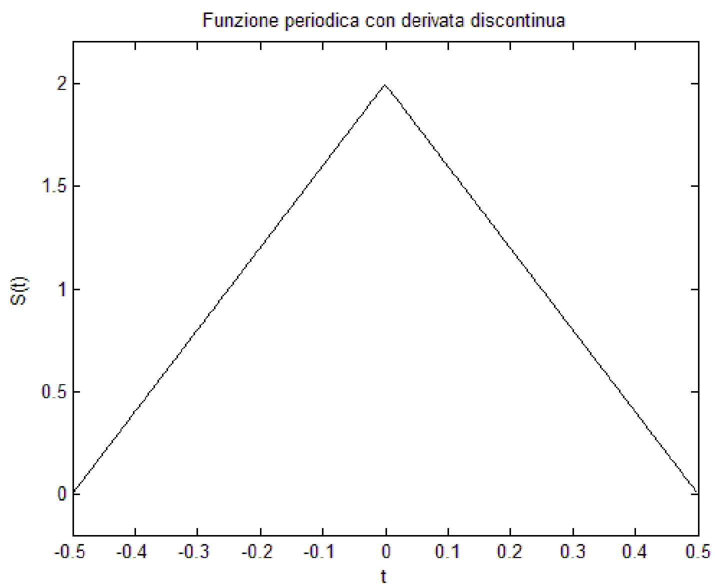
- ESEMPIO con spettri di segnali periodici

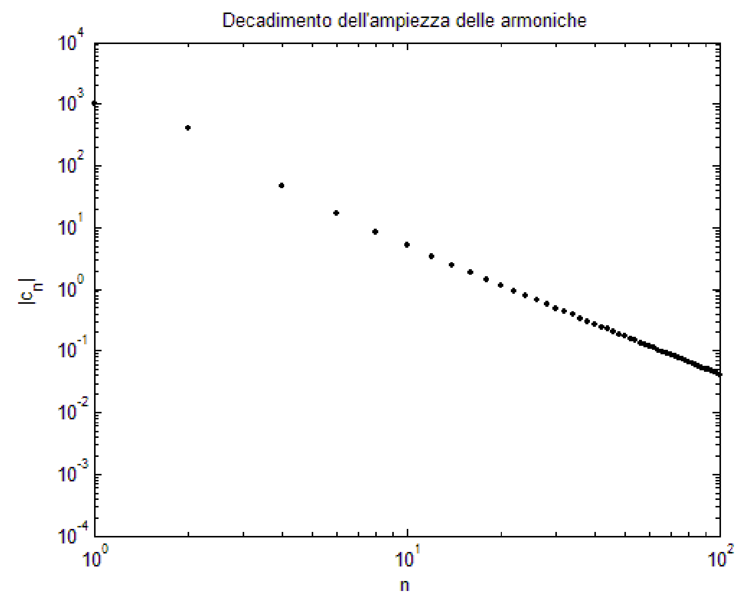




Banda di un segnale periodico reale

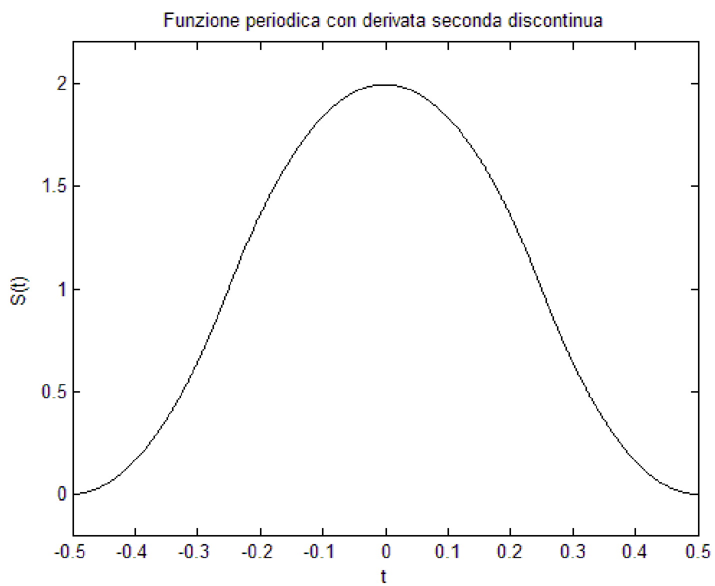
- ESEMPIO con spettri di segnali periodici

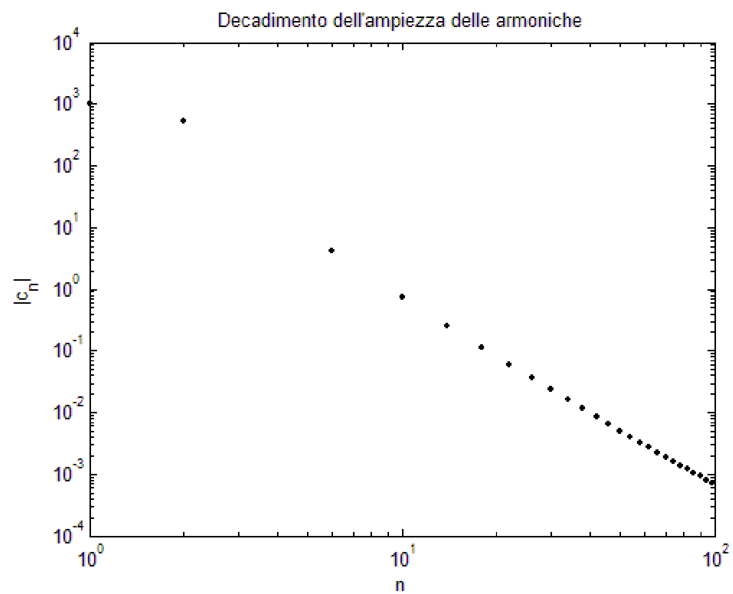




Banda di un segnale periodico reale

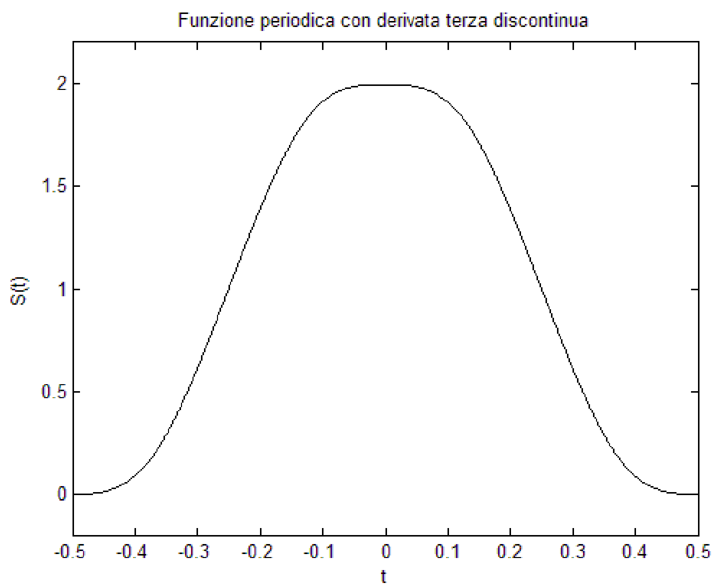
- ESEMPIO con spettri di segnali periodici

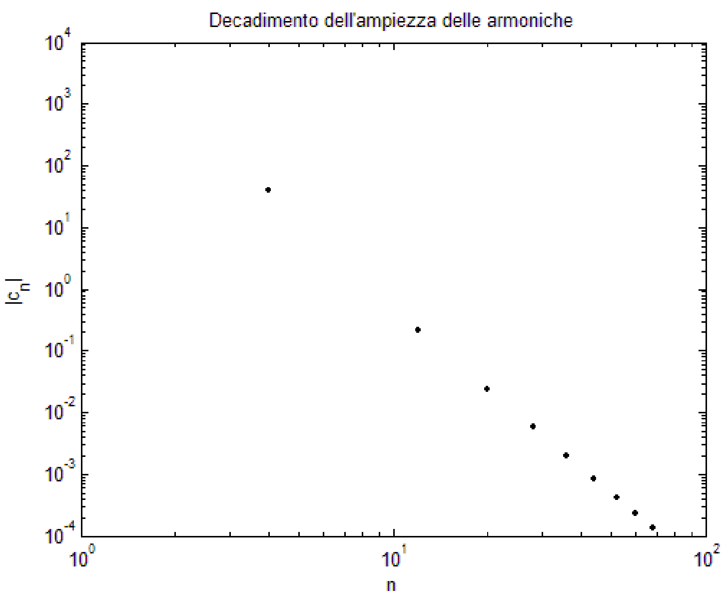




Banda di un segnale periodico reale

- ESEMPIO con spettri di segnali periodici





Analisi di Fourier: trasformata di Fourier

- I segnali periodici costitusicono una astrazione matematica. I segnali reali non sono periodici pertanto occore definire uno strumento matematico che permetta di caratterizzarli in un dominio frequenziale.
- Attraverso una estensione della serie di Fourier, si definisce, sotto opportune ipotesi, la trasformata di Fourier di un segnale *S(t):*

$$S(t) \sim \int \hat{S}(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\hat{S}(f) = \int S(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Analisi di Fourier: trasformata di Fourier

- La funzione $\hat{S}(f)$ è detta trasformata di Fourier.
- La trasformazione definita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni nel dominio del tempo e le relative trasformate nel dominio della frequenza (continuo).
- Un segnale viene quindi rappresentato come una funzione complessa continua della frequenza f.
- La trasformata di Fourier di un segnale viene generalmente rappresentata tramite ampiezza e fase, ottenendo rispettivamente lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase** del segnale.

Esempio: impulso rettangolare

- Trasformata di un impulso rettangolare:

$$S(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

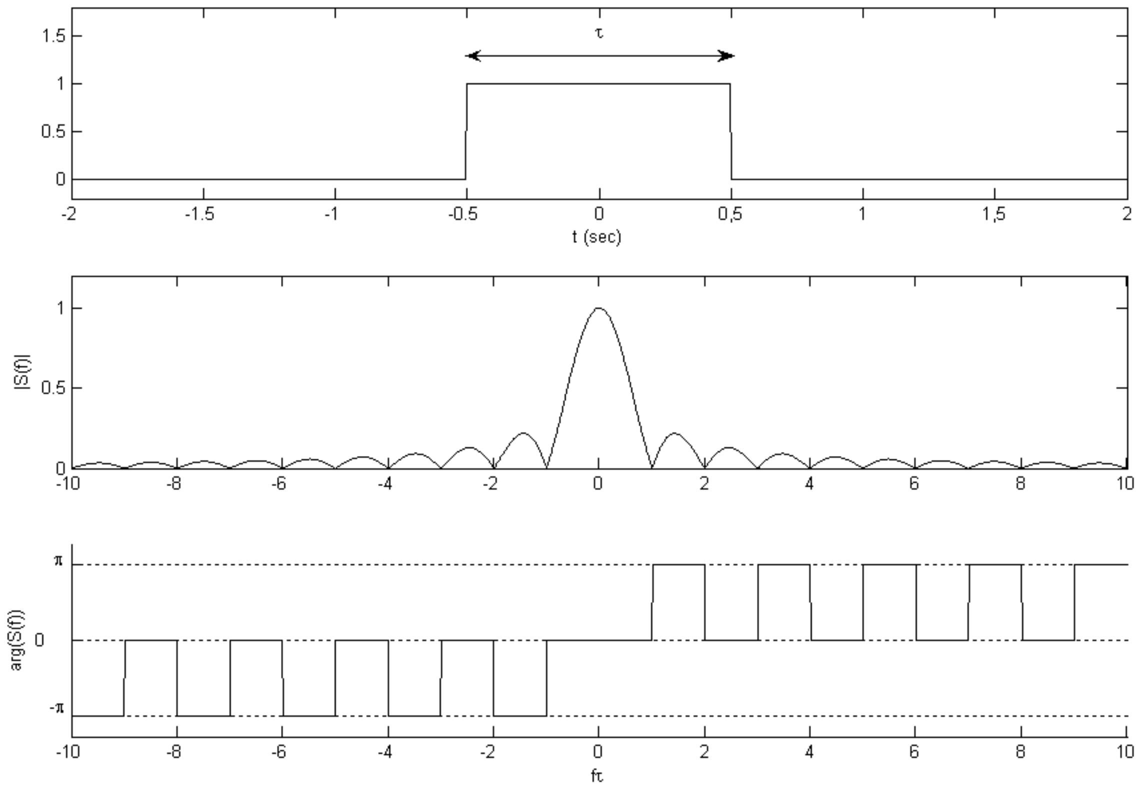
$$\begin{aligned}
\hat{S}(f) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos(2\pi ft) + j sin(2\pi ft)] dt \\
&= \frac{1}{2\pi f} [\sin(2\pi ft) + j cos(2\pi ft)]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{\sin(2\pi f/2) - \sin(-2\pi f/2)}{2\pi f} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \\
&= sinc(f)
\end{aligned}$$

Esempio: impulso rettangolare

Segnale

Spettro di ampiezza

Spettro di fase



Trasformata di Fourier: proprietà

- Linearità: $\mathscr{F}\left[aS(t)+bR(t)\right]=a\hat{S}(f)+b\hat{R}(f)$
- Ritardo temporale: $\mathscr{F}\left[S(t-t_0)\right]=\hat{S}(f)e^{-j2\pi f t_0}$
- Cambio di scala: $\mathscr{F}\left[S(at)\right]=\frac{1}{|a|}\hat{S}\left(\frac{f}{a}\right)$
- Convoluzione: $\mathscr{F}\left[S(t)*H(t)\right]=\hat{S}(f)\cdot\hat{H}(f)$
- Moltiplicazione: $\mathscr{F}\left[S(t)\cdot H(t)\right]=\hat{S}(f)*\hat{H}(f)$
- Traslazione in frequenza: $\mathscr{F}\left[S(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right]=\hat{S}(f-f_0)$
- Dualità: $\mathscr{F}\left[\hat{S}(t)\right]=S(-f)$

Trasformata di Fourier: proprietà

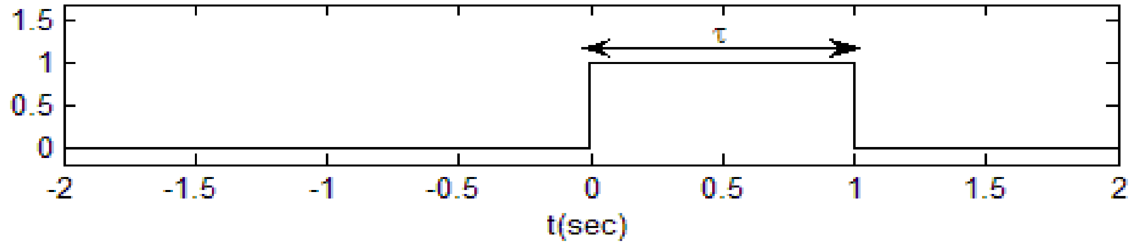
- Ritardo temporale: $\mathscr{F}[S(t-t_0)] = \hat{S}(f)e^{-j2\pi f t_0}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[S(t-t_0)] &= \int S(t-t_0)\,e^{-j2\pi f t}\,dt \\
&= \int S(\tau)\,e^{-j2\pi f(\tau+t_0)}\,d\tau \\
&= e^{-j2\pi f t_0}\int S(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \\
&= \hat{S}(f)\,e^{-j2\pi f t_0} \\
&= \left|\hat{S}(f)\right| e^{j(\arg[\hat{S}(f)]-2\pi f t_0)}
\end{aligned}$$

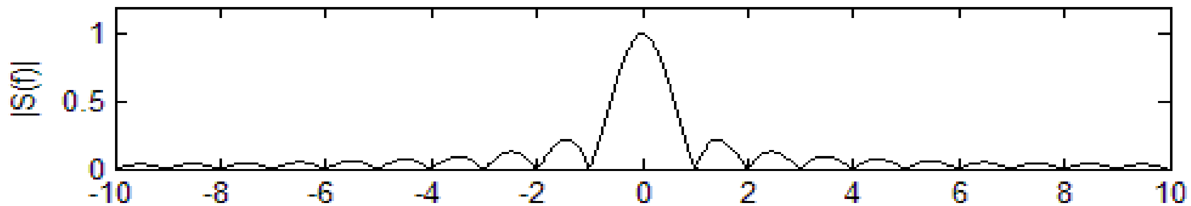
$$\begin{aligned}
\tau &= t-t_0 \\
d\tau &= dt
\end{aligned}$$

Trasformata di Fourier: ritardo temporale

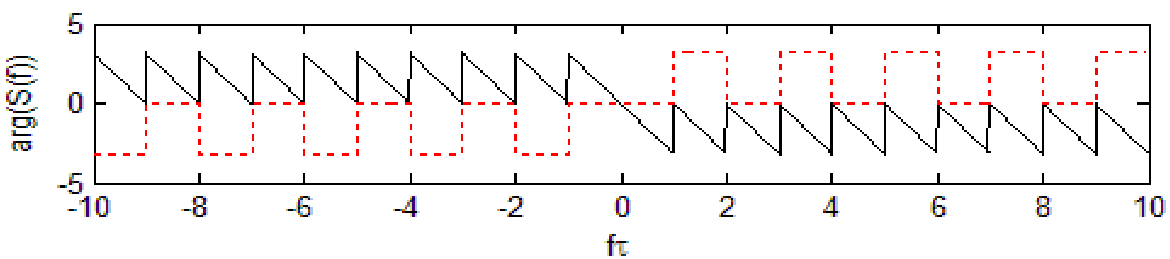
Segnale



Spettro di ampiezza



Spettro di fase

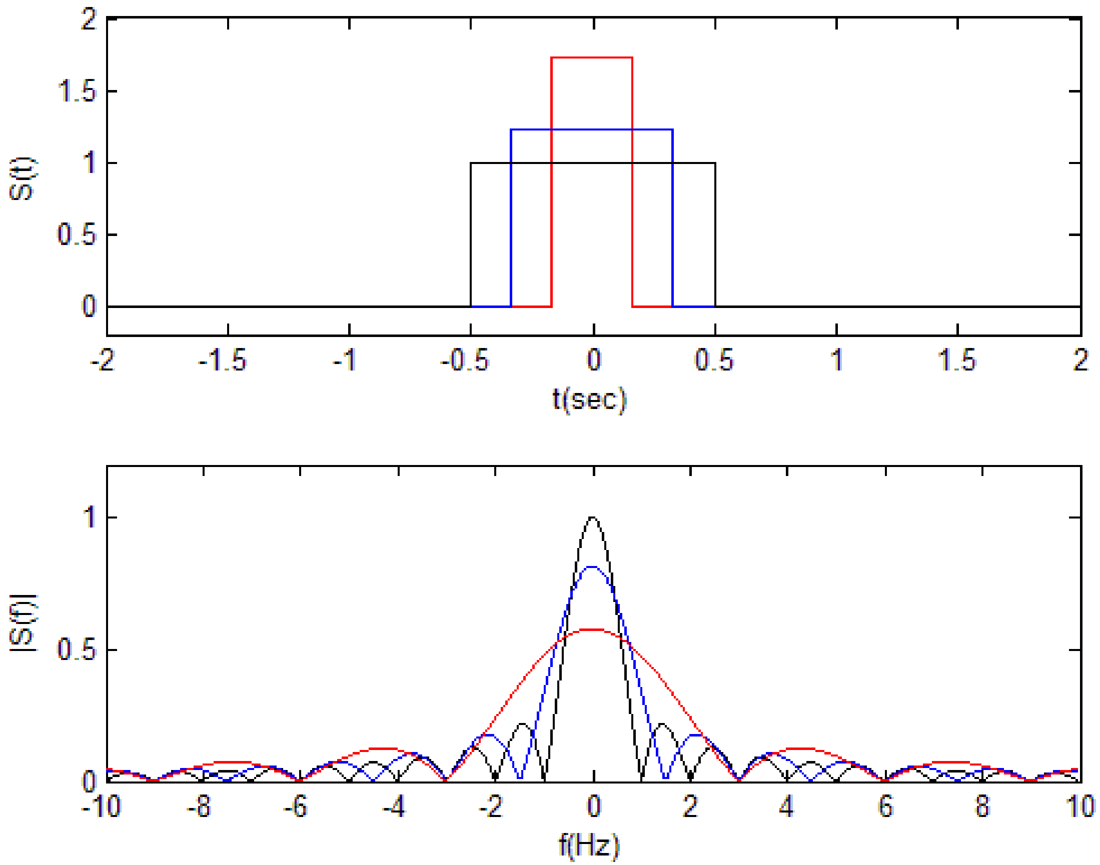


Trasformata di Fourier: proprietà

- Cambio di scala: $\mathscr{F}\left[S(at)\right] = \frac{1}{|a|}\hat{S}\left(\frac{f}{a}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[S(at)\right] &= \int S(at)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \\
&= \int S(\tau)\, e^{-j2\pi f(\tau/a)}\, d\tau \qquad \begin{array}{l} \tau = at \\ d\tau = a\, dt \end{array} \\
&= \frac{1}{|a|}\int S(\tau)\, e^{-j2\pi (f/a)\tau}\, d\tau \\
&= \frac{1}{|a|}\hat{S}\left(\frac{f}{a}\right)
\end{aligned}$$

Trasformata di Fourier: cambio di scala

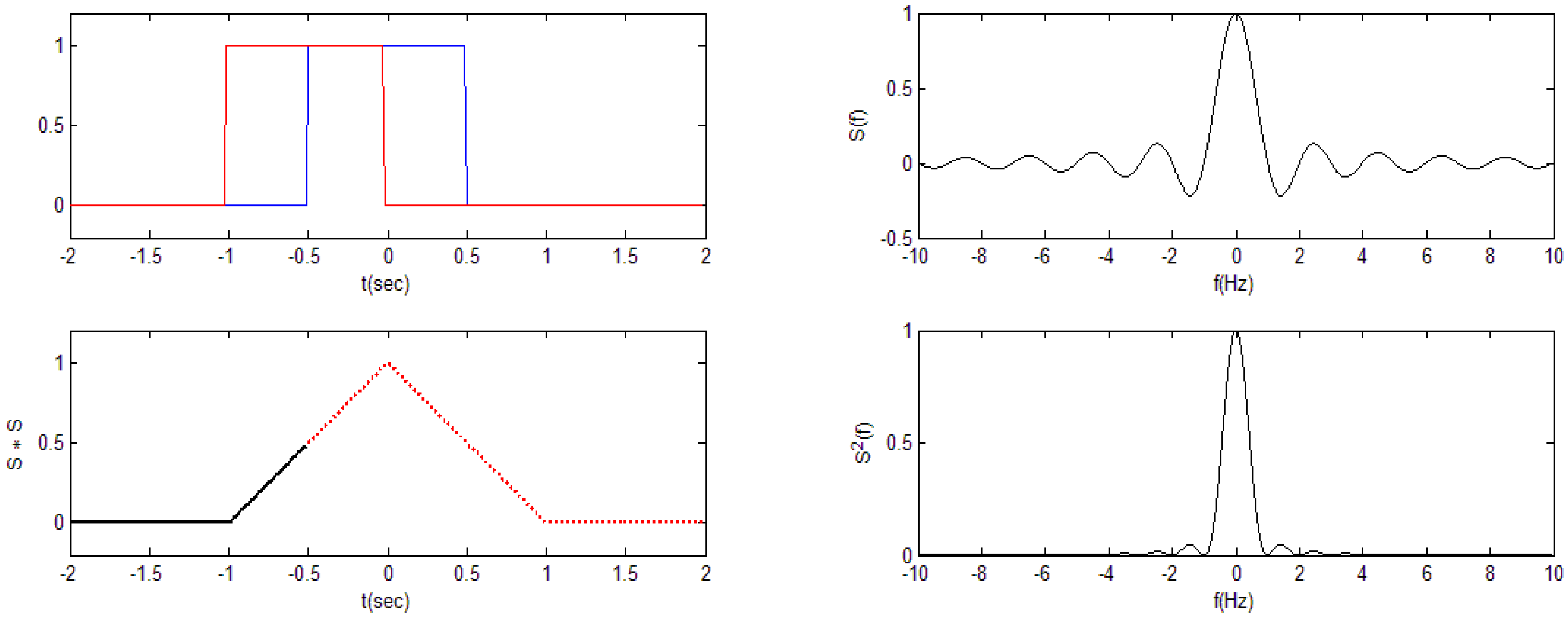


Trasformata di Fourier: proprietà

- Convoluzione: $\mathscr{F}\left[S(t) * H(t)\right] = \hat{S}(f) \cdot \hat{H}(f)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[S(t) * H(t)\right] &= \int \int S(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j2\pi ft}\, dt \\
&= \int S(\tau) \int H(t-\tau)\, e^{-j2\pi ft}\, dt\, d\tau \\
&= \int S(\tau)\, \hat{H}(f)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\
&= \hat{H}(f) \int S(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\
&= \hat{S}(f) \cdot \hat{H}(f)
\end{aligned}$$

Trasformata di Fourier: convoluzione



Trasformata di Fourier: proprietà

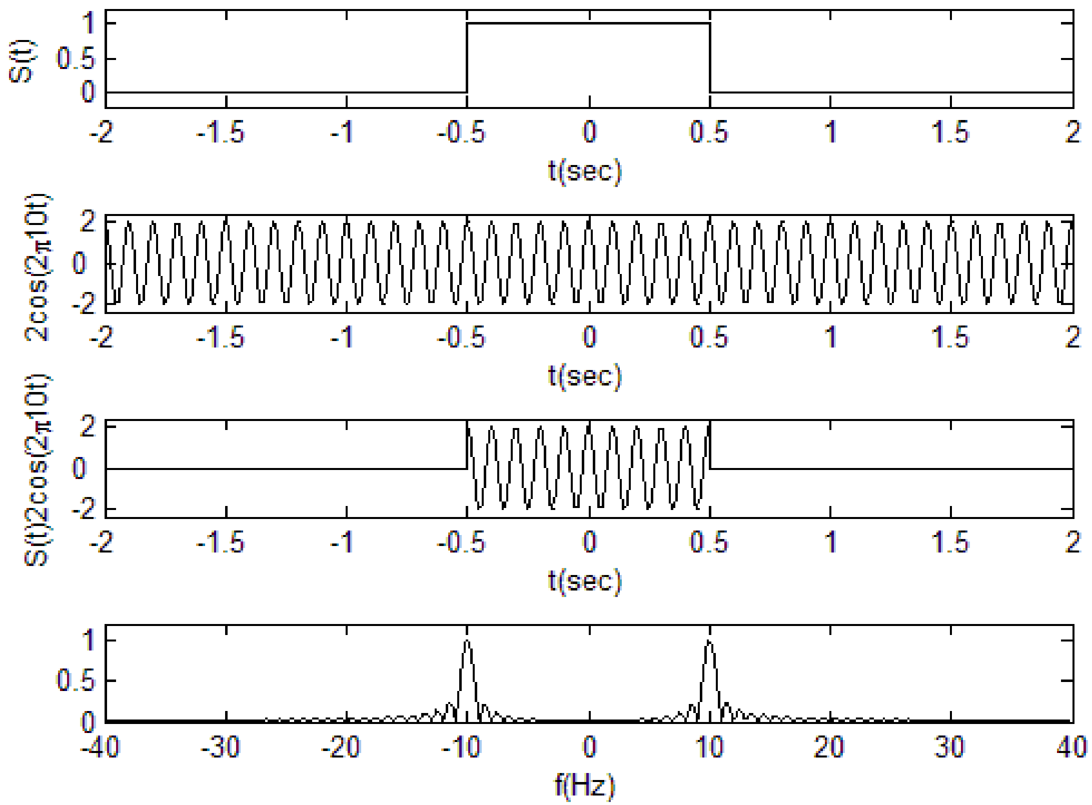
- Traslazione in frequenza: $\mathscr{F}\left[S(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right] = \hat{S}(f-f_0)$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[S(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right] &= \int S(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt \\ &= \int S(t)\, e^{-j2\pi (f-f_0) t}\, dt \\ &= \hat{S}(f-f_0)\end{aligned}$$

- Applicazione: modulazione

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[S(t)\cdot 2\cos(2\pi f_0 t)\right] &= \mathscr{F}\left[S(t)\cdot\left(e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right] \\ &= \hat{S}(f-f_0)+\hat{S}(f+f_0)\end{aligned}$$

Trasformata di Fourier: modulazione



Banda di un segnale reale

- Analogamente al caso dello sviluppo in serie di Fourier, si definisce **banda** di un segnale reale l'intervallo sul semiasse positivo delle frequenze $[f_{min},f_{max}]$, ove lo spettro di ampiezza è significativamente diverso da zero.

  La sua misura $B= f_{max} – f_{min}$ è detta **larghezza di banda.**

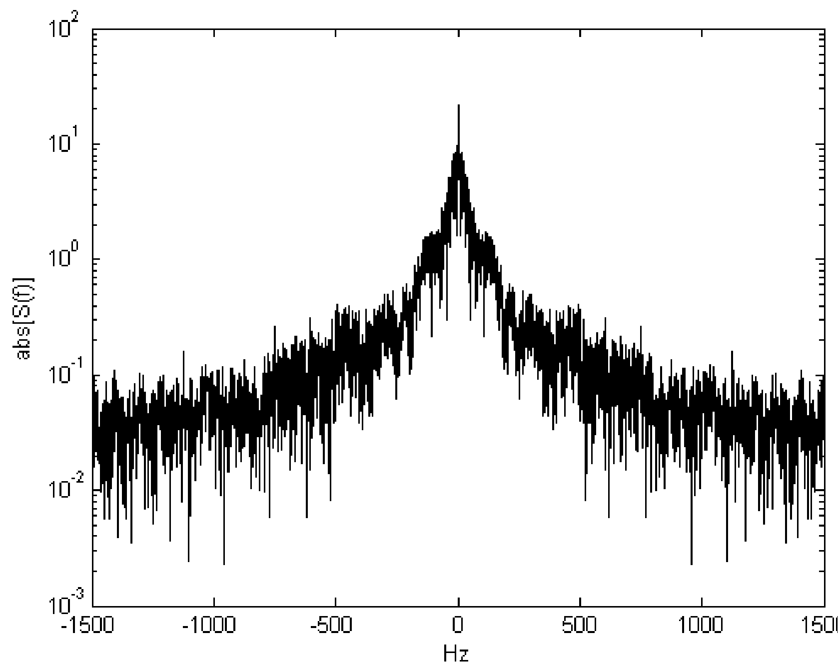
- I segnali di interesse applicativo sono quindi segnali a **banda limitata**. Tra i segnali a banda limitata possiamo distinguere due diverse tipologie di interesse applicativo:
  - Segnali passa-basso
  - Segnali passa-banda

Segnale passa basso

- Un segnale si dice **passo basso** (o in banda base) se f_{min} è zero o prossima ad esso, ovvero se $B/f_0 \approx 2$, dove f_0 è il punto medio dell'intervallo $[f_{min}, f_{max}]$.

Esempi:

- Segnale telegrafico;
- Segnale audio;
- Segnale video;
- Immagine ecografica;



Segnale passa banda

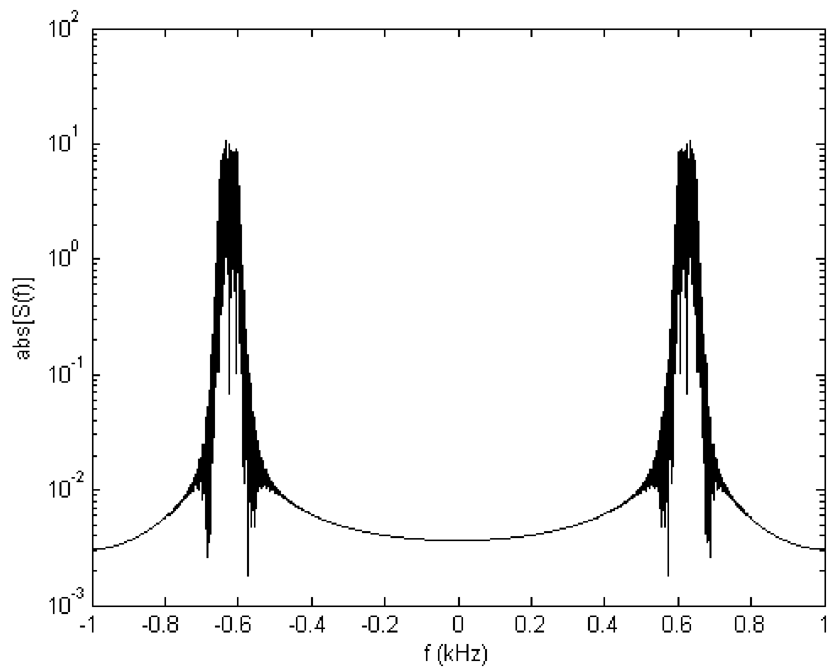
- Un segnale si dice **passo banda** se $f_{min} > 0$ e $B/f_0 << 1$, dove f_0 è il punto medio dell'intervallo $[f_{min}, f_{max}]$.

Esempi:

➔Segnale radio comunicazioni;

➔Segnale su fibra ottica;

➔Segnale ottenuto da una sonda ecografica;



Ripetizione periodica di una funzione

- Vogliamo ora studiare il caso di ripetezione periodica di un segnale *g(t)* nel dominio della trasformata di Fourier, allo scopo di mostrare le connessioni con la serie di Fourier.
- Consideriamo la ripetizione periodica con periodo T di un segnale *g(t):*

$$g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-kT)$$

- Poichè il segnale $g_p(t)$ è periodico, può essere rappresentato mediante il suo sviluppo in serie di Fourier

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Ripetizione periodica di una funzione

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T g_p(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-kT)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^T g(t-kT)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-kT}^{(-k+1)T} g(\tau)e^{-j2\pi n f_0 \tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j2\pi n f_0 \tau}d\tau = \frac{1}{T}\hat{g}\left(\frac{n}{T}\right) = f_0\hat{g}(n f_0)$$

- Riassumendo si ha che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier possono essere calcolati come campionamento della trasformata di Fourier della funzione *g(t)* nelle frequenze nf_0

$$c_n = f_0\hat{g}(nf_0)$$

Ripetizione periodica: esempi

- Ripetizione periodica della funzione *rect(t)* con periodo 1:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} rect(t-k) = 1$$

$$c_n = sinc(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

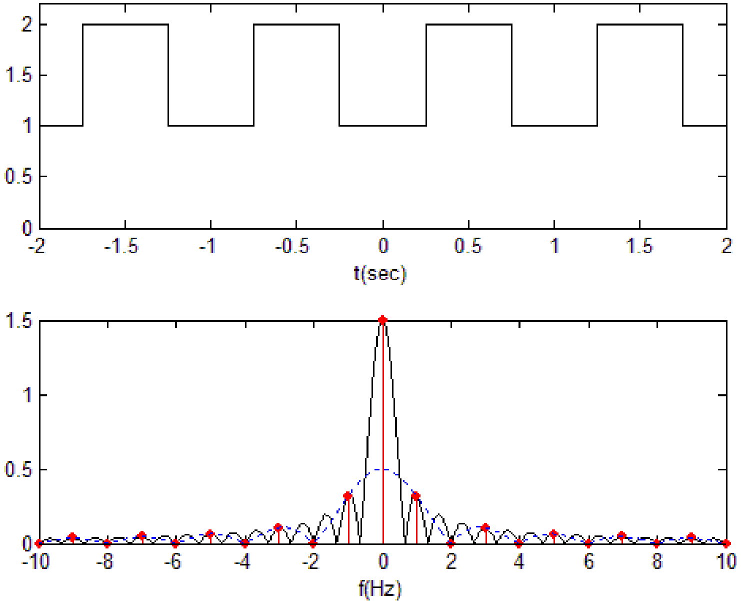
- Ripetizione periodica della funzione *rect(2t)* con periodo 1:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} rect(2(t-k))$$

$$c_n = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{n}{2}\right)$$

Ripetizione periodica: esempi

- Ripetizione periodica di *rect(2/3 t)* con periodo 1:



- Esistono infinite funzioni che hanno come ripetizione periodica la ripetizione di *rect(2/3 t)*

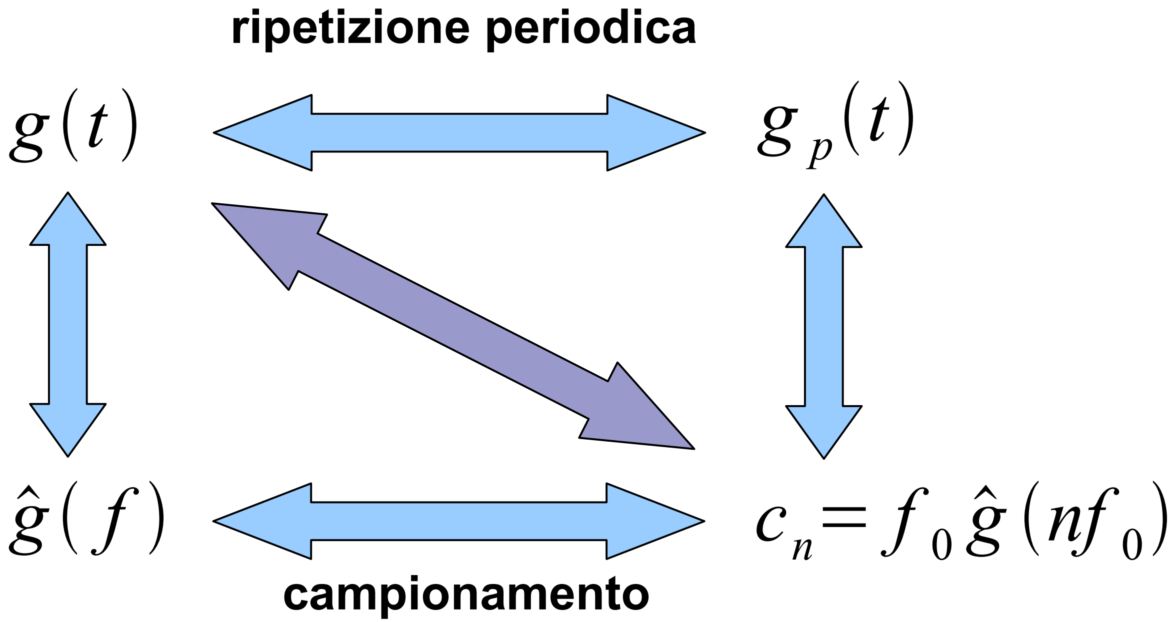
Ripetizione periodica di una funzione

- Una ripetizione periodica con periodo T nel dominio del tempo corrisponde pertanto ad un campionamento nel dominio delle frequenze con intervallo $1/T=f_0$.

$$
\begin{tikzcd}
g(t) \arrow[r, "\text{ripetizione periodica}"] \arrow[d, leftrightarrow] & g_p(t) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hat{g}(f) \arrow[r, "\text{campionamento}"'] & c_n = f_0 \hat{g}(nf_0)
\end{tikzcd}
$$

Ripetizione periodica di una funzione

- Nel caso in cui il segnale *g(t)* abbia durata limitata Δt < T (dove T è il periodo di ripetizione), l'operazione di ripetizione periodica risulta invertibile, quindi esiste una corrispondenza biunivoca tra *g(t)* e c_n.



Trasformata discreta di Fourier

- Finora abbiamo considerato segnali tempo continui, ma in generale è necessario trattare anche segnali tempo discreti.
- Sfruttando la proprietà di dualità della trasformata di Fourier è possibile definire la trasformata di una successione tempo-discreta S_n in cui $\mathrm{T_s}$ è l'intervallo tra due termini:

$$\hat{S}_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j2\pi nf T_s}$$

$$S_n = T_s \int_{1/T_s} \hat{S}_p(f) e^{j2\pi nfT_s} df$$

- La trasformata è periodica per dualità con periodo $1/T_s = f_s$.

Segnali tempo-discreti

- Essendo periodica, la trasformata di una successione, può essere ottenuta come ripetizione periodica di una funzione $\hat{S}(f)$, trasformata di Fourier del segnale $S(t)$:

$$\hat{S}_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{S}\left(f + \frac{k}{T_s}\right)$$

- In generale esistono infinite funzioni $\hat{S}(f)$ che danno come ripetizione periodica la funzione $\hat{S}_p(f)$.
- Per dualità $\hat{S}_p(f)$ deve essere la trasformata della sequenza ottenuta campionando $S(t)$ con passo T_s:

$$S_n = S(nT_s) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Ripetizione periodica di uno spettro

- Considerata la trasformata $\hat{S}(f)$ di un segnale *S(t)* possiamo valutarne la ripetizione periodica di periodo f_s:

$$\hat{S}_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{S}\left(f + \frac{k}{T_s}\right)$$

- Poichè $\hat{S}_p(f)$ è periodica è la trasformata di Fourier di una sequenza discreta S_n di intervallo T_s.

- Per dualità i coefficienti S_n si ottengono campionando il segnale *S(t)* con periodo T_s:

$$S_n = S(nT_s) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Campionamento di una funzione

- Un campionamento con intervallo T_s nel dominio dei tempi corrisponde pertanto a una ripetizione periodica nel dominio delle frequenze con periodo $1/T_s = f_s$.

$$
\begin{tikzcd}
S(t) \arrow[r, "\textbf{campionamento}"] \arrow[d, leftrightarrow] & S_n \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hat{S}(f) \arrow[r, "\textbf{ripetizione periodica}"'] & \hat{S}_p(f)
\end{tikzcd}
$$

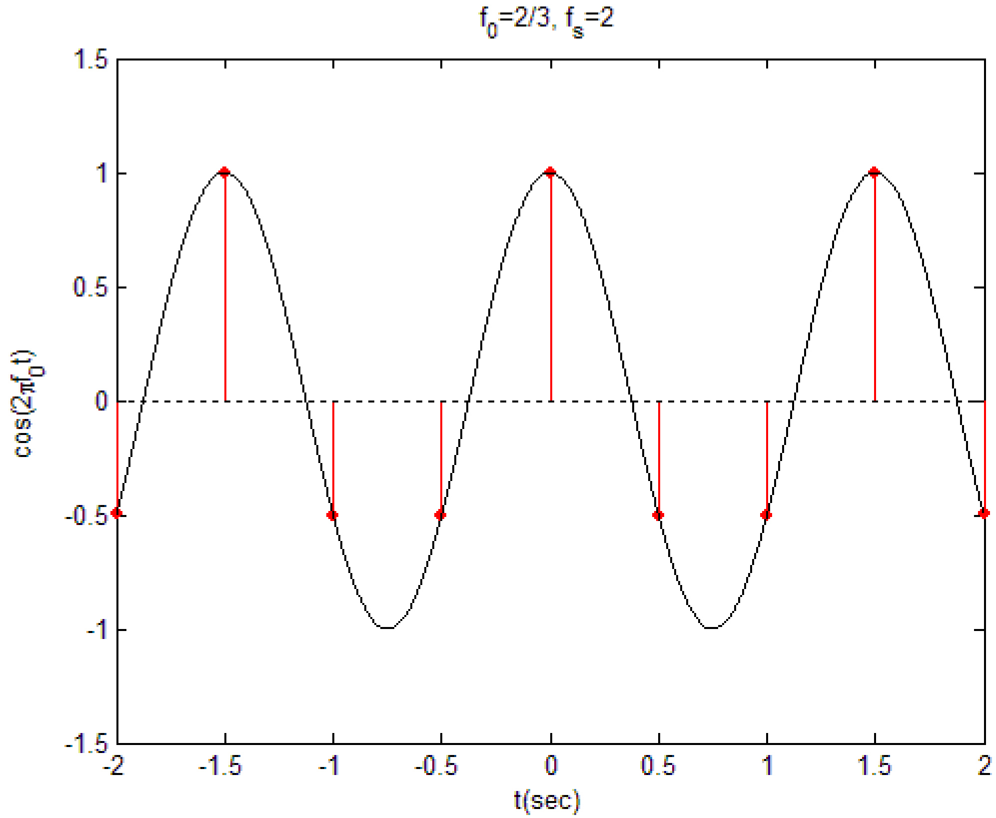
Teorema del campionamento di Shannon

- Se S*(t)* ha spettro nullo al di sopra di una frequenza f_m, l'operazione di campionamento con $f_s > 2f_m$, è invertibile, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra S(t) e S_n.

$$\begin{tikzcd}
S(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{campionamento}"] \arrow[d, leftrightarrow] & S_n \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hat{S}(f) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{ripetizione periodica}"'] & \hat{S}_p(f)
\end{tikzcd}$$

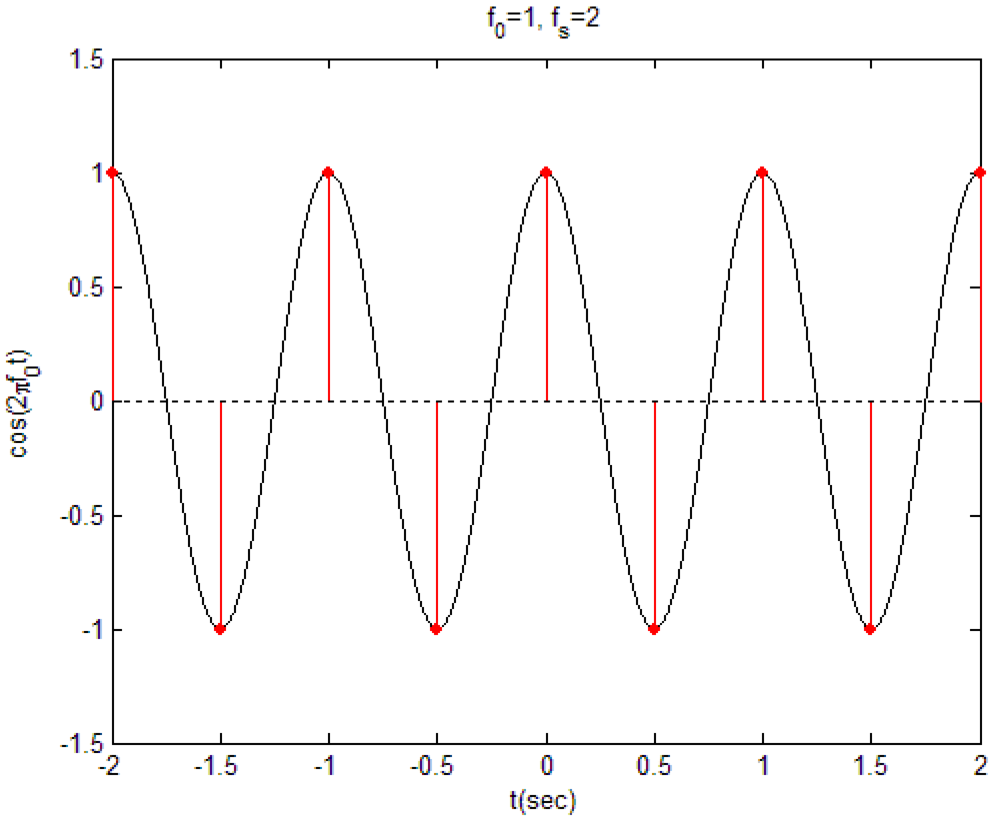
Campionamento: esempi

- Sovracampionamento di una sinusoide



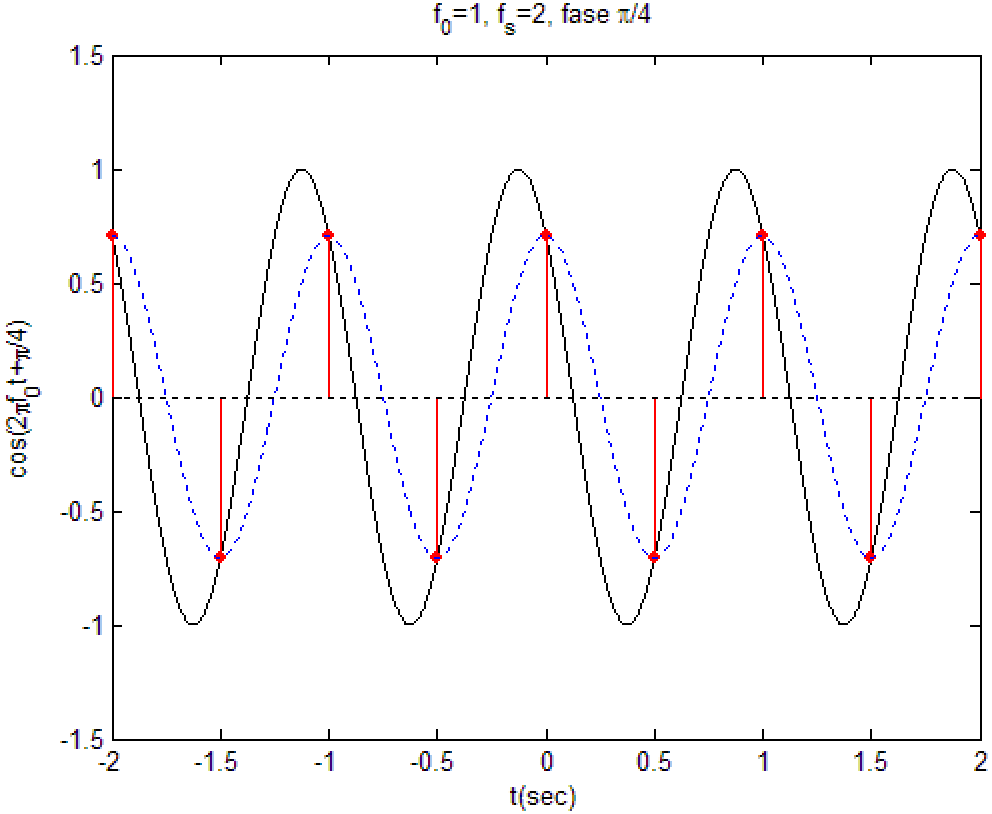
Campionamento: esempi

- Campionamento limite di una sinusoide



Campionamento: esempi

- Campionamento limite, errore di fase e ampiezza



Campionamento: esempi

- Sottocampionamento, perdita di informazione