

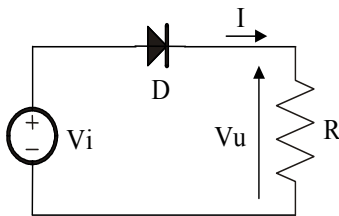
Alcuni circuiti raddrizzatori.

```
V = 1; Hz = 1; kΩ = 10.3; fA = 10.-15; mV = 10.-3;
ps1 = {RGBColor[0, 0, 1], {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}};
$TextStyle = {FontSize -> 12};
```

```
Off[General::"spell"]
```

```
spettro[a_List, f_] := Graphics[{Thickness[0.015], RGBColor[1, 0, 0],
  Table[Line[{{(k - 1) * f, 0}, {(k - 1) * f, a[[k]]}], {k, Length[a]}]}];
scrivi[x_] := Print[x, " = ", ToExpression[x], " = ",
  EngineeringForm[ToExpression[x] /. dati // N, 3]]
scriv1[x_] := Print[x, " = ", ToExpression[x], " = ",
  EngineeringForm[ToExpression[x] * 100 /. dati // N, 3], "%"]
```

Raddrizzatori a semionda.



Nel semplice raddrizzatore a semionda di figura, sia $V_i[t] = V_{iM} \cos[2\pi f t]$ con $V_{iM} = 5.0\text{V}$, $f = 50\text{Hz}$, $R = 10\text{k}\Omega$.

Calcolare il valore medio, il valore efficace e le ampiezze delle prime $n = 5$ armoniche della tensione V_u usando per il diodo D un modello

- A) a soglia nulla
- B) a soglia $V_\gamma = 0.7\text{V}$
- C) esponenziale con $I_S = 1\text{fA}$ e $V_T = 26\text{mV}$

```
Vi[t_] := ViM Cos[2 π f t];
```

```
dati = {ViM -> 5.0 V, f -> 50 Hz, R -> 10 kΩ}; n = 5; T =  $\frac{1}{f}$ ; Tn = T /. dati;
```

Caso A) - Modello a soglia nulla.

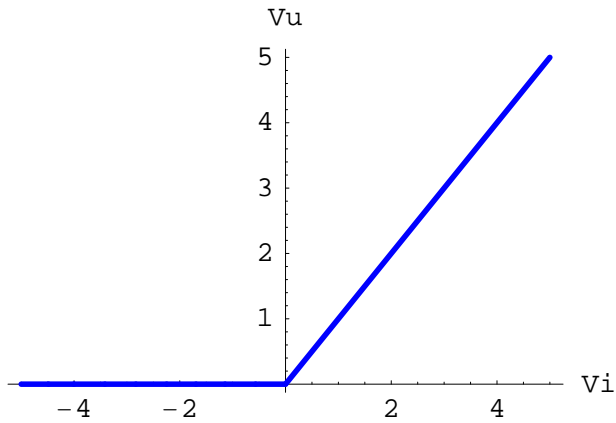
Con il modello a soglia nulla la caduta di tensione sul diodo è 0 se $I > 0$: in tal caso $V_u = V_i = RI$; in alternativa, $I = 0$ e quindi $V_u = RI = 0$.

Perciò

```
VuA[Vi] := Max[0, Vi]
```

```
Plot[VuA[Vi] /. dati, {Vi, -5, 5},
```

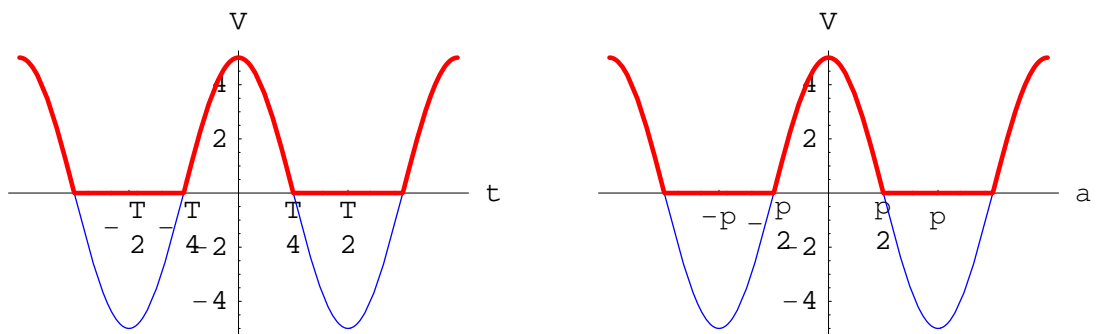
```
PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesLabel -> {"Vi", "Vu"}];
```



```

plt = Plot[Evaluate[{Vi[t], VuA[Vi[(t)]]} /. dati], {t, -Tn, Tn},
  Ticks -> {{{-Tn/2, "-Tn/2"}, {-Tn/4, "-Tn/4"}, 0, {Tn/4, "Tn/4"}, {Tn/2, "Tn/2"}}, Automatic},
  PlotStyle -> ps1, AxesLabel -> {"t", "V"}, DisplayFunction -> Identity];
plf = Plot[Evaluate[{Vi[alpha/(2 pi f)], VuA[Vi[alpha/(2 pi f)]]} /. dati],
  {alpha, -2 pi, 2 pi}, Ticks -> {{-pi, "-pi"}, {-pi/2, "-pi/2"}, 0, {pi/2, "pi/2"}, pi, "pi"}, Automatic},
  PlotStyle -> ps1, AxesLabel -> {"alpha", "V"}, DisplayFunction -> Identity];
Show[GraphicsArray[{plt, plf}]];

```



La tensione di uscita nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ è diversa da 0 solo fra $-T/4$ e $T/4$; essa inoltre è una funzione pari del tempo, perciò:

$$VuAmed = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] d\alpha; \text{ print["VuAmed"]}$$

```
scrivi["VuAmed"]
```

```
print[VuAmed]
```

$$VuAmed = \frac{ViM}{\pi} = 1.59$$

$$VuAeff = \text{Simplify}\left[\text{Sqrt}\left[\frac{2}{T} \int_0^{T/4} (Vi[t])^2 dt\right], \{ViM > 0\}\right]; \text{ scrivi["VuAeff"]}$$

$$VuAeff = \frac{ViM}{2} = 2.5$$

$$a[k_] := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] \text{Cos}[k \alpha] d\alpha; \quad b[k_] := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] \text{Sin}[k \alpha] d\alpha;$$

```
coeffAa = Array[a, n]; scrivi["coeffAa"]
```

$$\text{coeffAa} = \left\{ \frac{V_{iM}}{2}, \frac{2 V_{iM}}{3\pi}, 0, -\frac{2 V_{iM}}{15\pi}, 0 \right\} = \{2.5, 1.06, 0., -212. \times 10^{-3}, 0.\}$$

coeffAb = Array[b, n]

{0, 0, 0, 0, 0}

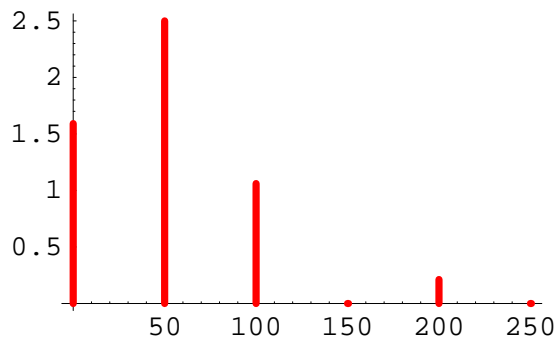
armonicheA = Simplify[Sqrt[coeffAa^2 + coeffAb^2], ViM > 0]; scrivi["armonicheA"]

$$\text{armonicheA} = \left\{ \frac{V_{iM}}{2}, \frac{2 V_{iM}}{3\pi}, 0, \frac{2 V_{iM}}{15\pi}, 0 \right\} = \{2.5, 1.06, 0., 212. \times 10^{-3}, 0.\}$$

ampiezzaA = Flatten[{a[0] / 2, armonicheA}]; scrivi["ampiezzaA"]

$$\text{ampiezzaA} = \left\{ \frac{V_{iM}}{\pi}, \frac{V_{iM}}{2}, \frac{2 V_{iM}}{3\pi}, 0, \frac{2 V_{iM}}{15\pi}, 0 \right\} = \{1.59, 2.5, 1.06, 0., 212. \times 10^{-3}, 0.\}$$

sA = spettro[ampiezzaA /. dati, f /. dati]; Show[sA, Axes -> True];



Caso B) - Modello a soglia non nulla.

dati = Append[dati, V γ -> 700 mV]

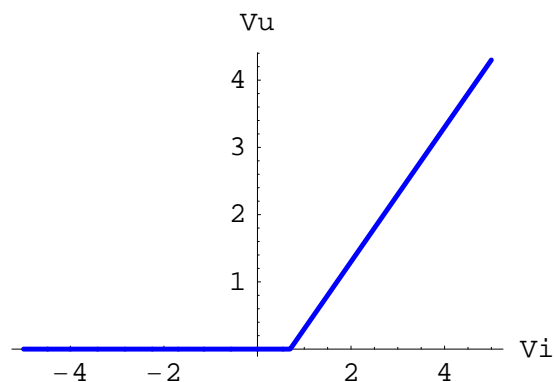
{ViM -> 5., f -> 50, R -> 10000., V γ -> 0.7}

Con il modello a soglia non nulla la caduta di tensione sul diodo è V_γ se $I > 0$: in tal caso $V_u = RI = V_i - V_\gamma$; in alternativa, $I = 0$ e quindi $V_u = RI = 0$. Perciò

VuB[Vi_] := Max[0, Vi - V γ]

Plot[VuB[Vi] /. dati, {Vi, -5, 5},

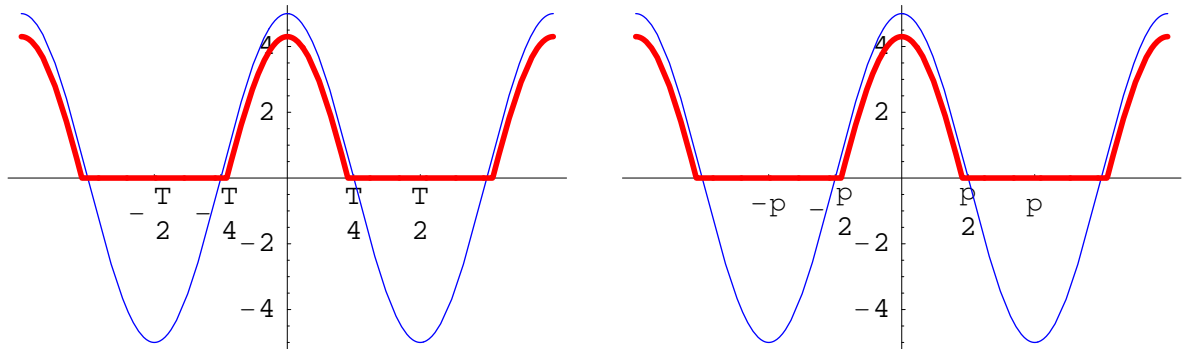
PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesLabel -> {"Vi", "Vu"}];



```

plt = Plot[Evaluate[{Vi[t], VuB[Vi[(t)]]} /. dati], {t, -Tn, Tn},
  Ticks -> {{{-Tn/2, "-Tn/2"}, {-Tn/4, "-Tn/4"}, 0, {Tn/4, "Tn/4"}, {Tn/2, "Tn/2"}}, Automatic},
  PlotStyle -> ps1, DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> All];
plf = Plot[Evaluate[{Vi[alpha/(2 pi f)], VuB[Vi[alpha/(2 pi f)]]} /. dati],
  {alpha, -2 pi, 2 pi}, Ticks -> {{-pi, "-pi/2", 0, pi/2, pi}, Automatic},
  PlotStyle -> ps1, DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> All];
Show[GraphicsArray[{plt, plf}]];

```



La corrente e Vu sono diverse da 0 in intervalli di tempo inferiori a un semiperiodo

```

Flatten[Solve[Vi[t] == Vgamma, t]];
t^- = t /. %[[1]];
t^+ = t /. %[[2]];
scrivi["{t^-, t^+}"]

```

$$\{t^-, t^+\} = \left\{ -\frac{\text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right]}{2 f \pi}, \frac{\text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right]}{2 f \pi} \right\} = \{-4.55 \times 10^{-3}, 4.55 \times 10^{-3}\}$$

```

{alpha^- = 2 pi f t^-, alpha^+ = 2 pi f t^+}; scrivi["{alpha^-, alpha^+}"]

```

$$\{\alpha^-, \alpha^+\} = \left\{ -\text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right] \right\} = \{-1.43, 1.43\}$$

```

VuBmed = 1/pi Integrate[(Vi[alpha/(2 pi f)] - Vgamma) dalpha, {alpha, alpha^-, alpha^+}]; scrivi["VuBmed"]

```

$$\text{VuBmed} = \frac{V_{iM} \sqrt{1 - \frac{V_\gamma^2}{V_{iM}^2}} - V_\gamma \text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right]}{\pi} = 1.26$$

```

VuBeff = Simplify[Sqrt[2 f Integrate[(Vi[t] - Vgamma)^2 dt, {t, t^-, t^+}], {ViM > 0}]; scrivi["VuBeff"]

```

$$\text{VuBeff} = \frac{\sqrt{-3 V_\gamma \sqrt{V_{iM}^2 - V_\gamma^2} + (V_{iM}^2 + 2 V_\gamma^2) \text{ArcCos}\left[\frac{V_\gamma}{V_{iM}}\right]}}{\sqrt{2 \pi}} = 2.06$$

```

a[k_] := 2/pi Integrate[(Vi[alpha/(2 pi f)] - Vgamma) Cos[k alpha] dalpha, {alpha, alpha^-, alpha^+}];
b[k_] := 1/pi Integrate[(Vi[alpha/(2 pi f)] - Vgamma) Sin[k alpha] dalpha, {alpha, alpha^-, alpha^+}];

```

```

coeffBa = Simplify[Array[a, n], ViM > 0]; scrivi["coeffBa"]

```

$$\text{coeffBa} = \left\{ \frac{-V_Y \sqrt{1 - \frac{V_Y^2}{V_{iM}^2}} + V_{iM} \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]}{\pi}, \frac{2 (V_{iM}^2 - V_Y^2)^{3/2}}{3 \pi V_{iM}^2}, \right. \\ \left. \frac{2 V_Y \left(1 - \frac{V_Y^2}{V_{iM}^2}\right)^{3/2}}{3 \pi}, -\frac{2 \sqrt{V_{iM}^2 - V_Y^2} (V_{iM}^4 - 7 V_{iM}^2 V_Y^2 + 6 V_Y^4)}{15 \pi V_{iM}^4}, \frac{1}{60 \pi} \right. \\ \left. \left(15 V_{iM} \text{Sin}\left[4 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right] - 24 V_Y \text{Sin}\left[5 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right] + 10 V_{iM} \text{Sin}\left[6 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right]\right) \right\} \\ = \{2.06, 1.03, 144. \times 10^{-3}, -182. \times 10^{-3}, -82. \times 10^{-3}\}$$

coeffBb = Simplify[Array[b, n], ViM > 0]

{0, 0, 0, 0, 0}

armonicheB = Simplify[Sqrt[coeffBa^2 + coeffBb^2], ViM > 0]; scrivi["armonicheB"]

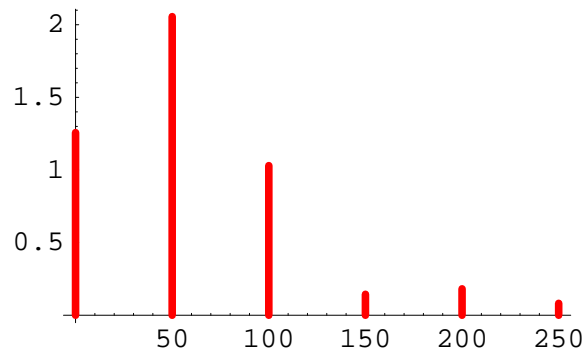
armonicheB =

$$\left\{ \frac{\sqrt{\left(V_Y \sqrt{1 - \frac{V_Y^2}{V_{iM}^2}} - V_{iM} \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right)^2}}{\pi}, \frac{2 \sqrt{(V_{iM}^2 - V_Y^2)^3}}{3 \pi V_{iM}^2}, \frac{2 \sqrt{V_Y^2 \left(1 - \frac{V_Y^2}{V_{iM}^2}\right)^3}}{3 \pi}, \right. \\ \left. \frac{2 \sqrt{\frac{(V_{iM}^2 - 6 V_Y^2)^2 (V_{iM}^2 - V_Y^2)^3}{V_{iM}^3}}}{15 \pi}, \frac{1}{60 \pi} \left(\sqrt{\left(15 V_{iM} \text{Sin}\left[4 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right] - 24 V_Y \right.} \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{Sin}\left[5 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right] + 10 V_{iM} \text{Sin}\left[6 \text{ArcCos}\left[\frac{V_Y}{V_{iM}}\right]\right]\right)^2} \right) \right\} \\ = \{2.06, 1.03, 144. \times 10^{-3}, 182. \times 10^{-3}, 82. \times 10^{-3}\}$$

ampiezzeB = Prepend[armonicheB, a[0] / 2]; EngineeringForm[ampiezzeB /. dati, 3]

{1.26, 2.06, 1.03, 144. × 10⁻³, 182. × 10⁻³, 82. × 10⁻³}

sB = spettro[ampiezzeB /. dati, f /. dati]; Show[sB, Axes -> True];



Caso C) - Modello esponenziale.

dati = Flatten[{dati, IS -> 1 fA, VT -> 26. mV}];

Con il modello esponenziale la caduta di tensione sul diodo è $V_d = V_T \cdot \text{Log}\left[1 + \frac{I}{I_S}\right]$. Se $I \geq 0$, $V_u = R \cdot I = V_i - V_d$; se $I < 0$, deve essere $I > -I_S$, ma è noto che tale valore non rappresenta la reale corrente inversa di un diodo, che comunque è assai piccola rispetto a quella diretta, è quindi più ragionevole assumere $I = 0$ e quindi $V_u = R \cdot I = 0$ quando $V_i < 0$.

Il valore di V_u che corrisponde ad ogni prefissato valore di $V_i \geq 0$ è soluzione dell'equazione

$$\text{eq} = V_u == V_i - V_T \text{Log}\left[1 + \frac{V_u}{I_S R}\right]; \text{eqd} = \text{eq} /. \text{dati}; \text{scrivi}["\text{eq}"]$$

$$eq = Vu = Vi - VT \text{Log}\left[1 + \frac{Vu}{IS R}\right] = Vu = Vi - (26. \times 10^{-3}) \text{Log}[1. + (100. \times 10^9) Vu]$$

la quale deve essere risolta numericamente per ogni assegnato valore di Vi. Per esempio, si può dividere l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ in nint = 100 parti uguali e calcolare i 101 valori di Vi corrispondenti agli estremi di tali sub-intervalli:

```
nint = 100;

αα = Table[-π/2 + k π/nint, {k, 0, nint}]; αα // Short
Vilist = Vi[αα / (2 π f)] /. dati ; Short[EngineeringForm[Vilist, 3], 3]

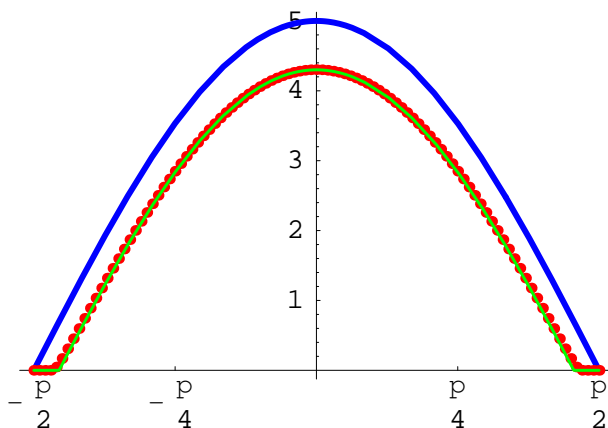
{-π/2, -49π/100, -12π/25, <<96>>, 49π/100, π/2}

{0, 157. × 10-3, 314. × 10-3, 471. × 10-3, <<93>>, 471. × 10-3, 314. × 10-3, 157. × 10-3, 0}

sol =
Table[FindRoot[Evaluate[eqd /. Vi -> Vilist[[k]]], {Vu, 0}], {k, Length[Vilist]};
Vulist = Table[Chop[Vu /. sol[[k]], 0.00001], {k, Length[sol]};
EngineeringForm[Vulist, 3]

{0, 0, 0, 705. × 10-6, 47.4 × 10-3, 170. × 10-3, 309. × 10-3, 453. × 10-3, 598. × 10-3, 744. × 10-3,
890. × 10-3, 1.03, 1.18, 1.32, 1.46, 1.6, 1.74, 1.87, 2., 2.13, 2.26, 2.38, 2.5, 2.62,
2.74, 2.85, 2.96, 3.06, 3.16, 3.26, 3.36, 3.44, 3.53, 3.61, 3.69, 3.76, 3.83, 3.89,
3.95, 4.01, 4.06, 4.11, 4.15, 4.18, 4.22, 4.24, 4.26, 4.28, 4.29, 4.3, 4.3, 4.3,
4.29, 4.28, 4.26, 4.24, 4.22, 4.18, 4.15, 4.11, 4.06, 4.01, 3.95, 3.89, 3.83, 3.76,
3.69, 3.61, 3.53, 3.44, 3.36, 3.26, 3.16, 3.06, 2.96, 2.85, 2.74, 2.62, 2.5, 2.38,
2.26, 2.13, 2., 1.87, 1.74, 1.6, 1.46, 1.32, 1.18, 1.03, 890. × 10-3, 744. × 10-3,
598. × 10-3, 453. × 10-3, 309. × 10-3, 170. × 10-3, 47.4 × 10-3, 705. × 10-6, 0, 0, 0}

Vigraf = Plot[Evaluate[Vi[x / (2 π f)] /. dati], {x, -Pi/2, Pi/2},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}, DisplayFunction -> Identity];
VuCgraf = ListPlot[Transpose[{αα, Vulist}], PlotStyle ->
{RGBColor[1, 0, 0], AbsolutePointSize[4]}, DisplayFunction -> Identity];
VuBgraf = Plot[Evaluate[VuB[Vi[x / (2 π f)]] /. dati], {x, -Pi/2, Pi/2},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.005]}, DisplayFunction -> Identity];
Show[{Vigraf, VuCgraf, VuBgraf}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
Ticks -> {{-π/2, -π/4, 0, π/4, π/2}, Automatic}];
```



Come si può notare, il modello a soglia 0.7 e il modello esponenziale danno risultati molto simili.

Per calcolare quanto richiesto, si può ricorrere a un'interpolazione dei dati numerici:

```
pts = Transpose[{αα, Vulist}];
interp = Interpolation[pts];
```

Il valore medio e il valore efficace:

```
VuCmed = EngineeringForm[NIntegrate[interp[x], {x, 0, Pi/2}]/Pi, 4];
VuCeff =
  EngineeringForm[Sqrt[NIntegrate[(interp[x])^2, {x, -Pi/2, Pi/2}]/2/Pi], 4];
{VuCmed, VuCeff}
Print["Modello a soglia: ",
  {EngineeringForm[VuBmed /. dati, 4], EngineeringForm[VuBeff /. dati, 4]}]

{1.267, 2.071}
```

Modello a soglia: {1.257, 2.064}

```
a[k_] :=  $\frac{2}{\pi}$  NIntegrate[interp[x] * Cos[k x], {x, 0, Pi/2}, AccuracyGoal -> Automatic]
b[k_] :=
   $\frac{1}{\pi}$  NIntegrate[interp[x] * Sin[k x], {x, -Pi/2, Pi/2}, AccuracyGoal -> Automatic]
```

```
coeffCa = Array[a, n]; coeffCb = Array[b, n];
armonicheC = Sqrt[coeffCa^2 + coeffCb^2];
ampiezzeC = Prepend[armonicheC, a[0]/2]; EngineeringForm[ampiezzeC, 3]
Print["Modello a soglia: ", EngineeringForm[ampiezzeB /. dati, 3]]
```

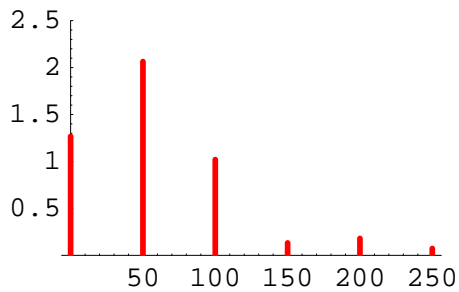
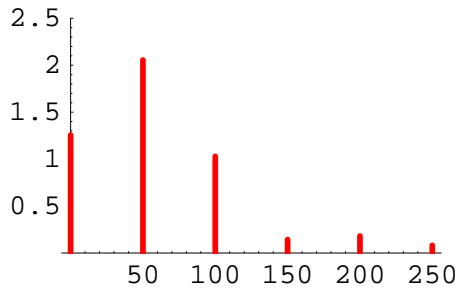
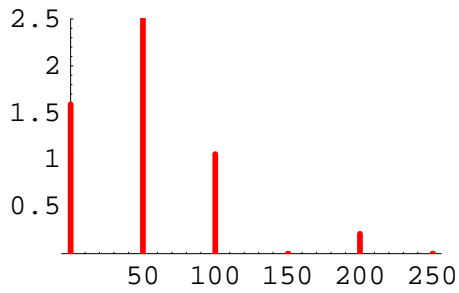
```
{1.27, 2.06, 1.02, 133. × 10-3, 180. × 10-3, 73.3 × 10-3}
```

Modello a soglia: {1.26, 2.06, 1.03, 144. × 10⁻³, 182. × 10⁻³, 82. × 10⁻³}

Gli spettri nei tre casi:

```
uno = Show[sA, Axes -> True, PlotRange -> {0, 2.5}, DisplayFunction -> Identity];
due = Show[sB, Axes -> True, PlotRange -> {0, 2.5}, DisplayFunction -> Identity];
sC = spettro[ampiezzeC, f /. dati];
tre = Show[sC, Axes -> True, PlotRange -> {0, 2.5}, DisplayFunction -> Identity];

Show[GraphicsArray[{{uno}, {due}, {tre}}]];
```



Complementi

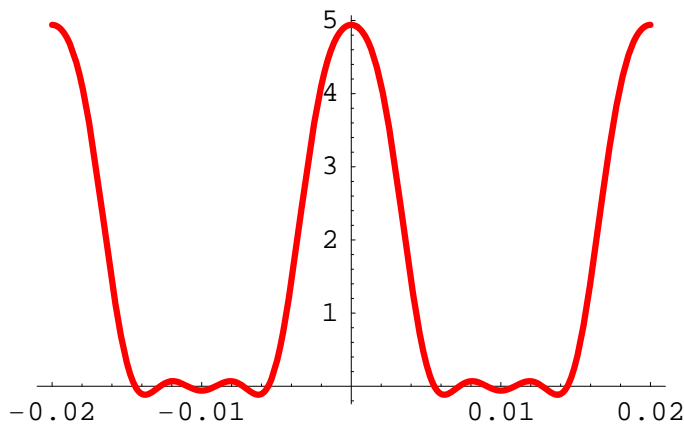
I

```
coseni = Table[Cos[k 2 π f t], {k, n}];
seni = Table[Sin[k 2 π f t], {k, n}];
```

Con riferimento ai casi A e B, usando n armoniche, Vu[t] risulta approssimata così

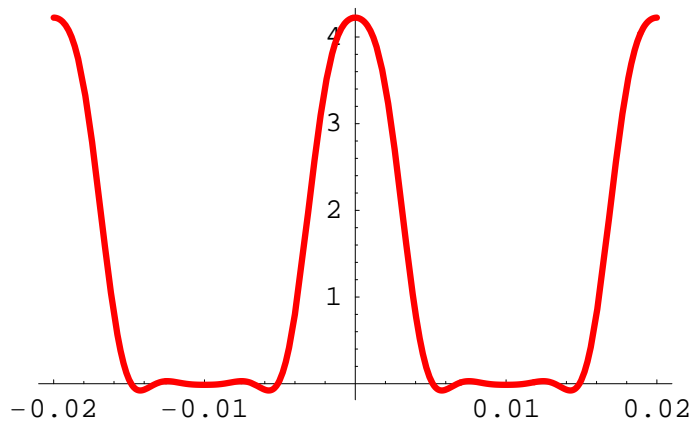
```
VuAn = VuAmed + Apply[Plus, coeffAa * coseni + coeffAb * seni]
Plot[Evaluate[VuAn /. dati], {t, -T /. dati, T /. dati},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}];
```

$$\frac{ViM}{\pi} + \frac{1}{2} ViM \cos[2 f \pi t] + \frac{2 ViM \cos[4 f \pi t]}{3 \pi} - \frac{2 ViM \cos[8 f \pi t]}{15 \pi}$$



```
VuBn = (VuBmed + Apply[Plus, coeffBa * coseni + coeffBb * seni]) /. dati
Plot[Evaluate[VuBn /. dati], {t, -T /. dati, T /. dati},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}];
```

```
1.25717 + 2.05583 Cos[100 π t] + 1.02999 Cos[200 π t] +
0.144199 Cos[300 π t] - 0.181773 Cos[400 π t] - 0.0819972 Cos[500 π t]
```



I valori efficaci delle n armoniche sono

```
valeffA = armonicheA / Sqrt[2]
valeffB = armonicheB / Sqrt[2] /. dati
```

```
{  $\frac{ViM}{2\sqrt{2}}$ ,  $\frac{\sqrt{2} ViM}{3\pi}$ , 0,  $\frac{\sqrt{2} ViM}{15\pi}$ , 0 }
```

```
{1.45369, 0.728314, 0.101964, 0.128533, 0.0579808}
```

Il valore efficace di Vun è (Parseval):

```
VuneffA =
  NumberForm[Simplify[Sqrt[VuAmed^2 + Apply[Plus, valeffA^2]] // N, ViM > 0], 4]
VuneffB =
  NumberForm[Simplify[Sqrt[VuBmed^2 + Apply[Plus, valeffB^2]] // N, ViM > 0], 4] /. dati
```

```
0.4997 ViM
```

```
2.063
```

mentre il valore efficace di Vu è

VuAeff // N
VuBeff /. dati

0.5 ViM

2.06387

Nel caso dei circuiti raddrizzatori la componente utile in Vu è il valore medio, perciò ha senso definire l'efficienza η del raddrizzatore come rapporto fra la potenza utile sul carico R e la potenza erogata dal generatore; nel caso A la potenza dissipata nel diodo è nulla, quindi

$$\eta_A = \frac{VuAmed^2}{VuAeff^2}; \text{ scrivil}["\eta_A"]$$

$$\eta_A = \frac{4}{\pi^2} = 40.5\%$$

In alternativa, ricordando la definizione di potenza attiva, che Vi e Vu sono funzioni pari del tempo, che Vu è 0 per $T/4 < t < T/2$ e che $I = Vu/R$, si ha:

$$Pg_A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] * \frac{Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right]}{R} d\alpha$$

$$\frac{ViM^2}{4R}$$

$$Pc_A = VuAmed^2 / R$$

$$\frac{ViM^2}{\pi^2 R}$$

$$\eta_A = Pc_A / Pg_A$$

$$\frac{4}{\pi^2}$$

Analogamente, nel caso B:

$$Pg_B = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha^*} Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] * \frac{(Vi \left[\frac{\alpha}{2\pi f} \right] - V\gamma)}{R} d\alpha$$

$$\frac{ViM \left(-V\gamma \sqrt{1 - \frac{V\gamma^2}{ViM^2}} + ViM \text{ArcCos} \left[\frac{V\gamma}{ViM} \right] \right)}{2\pi R}$$

$$Pc_B = VuBmed^2 / R$$

$$\frac{\left(ViM \sqrt{1 - \frac{V\gamma^2}{ViM^2}} - V\gamma \text{ArcCos} \left[\frac{V\gamma}{ViM} \right] \right)^2}{\pi^2 R}$$

$$\eta_B = Pc_B / Pg_B; \text{ scrivil}["\eta_B"]$$

$$\eta_B = \frac{2 \left(ViM \sqrt{1 - \frac{V\gamma^2}{ViM^2}} - V\gamma \text{ArcCos} \left[\frac{V\gamma}{ViM} \right] \right)^2}{\pi ViM \left(-V\gamma \sqrt{1 - \frac{V\gamma^2}{ViM^2}} + ViM \text{ArcCos} \left[\frac{V\gamma}{ViM} \right] \right)} = 30.8\%$$

Se V_u fosse invece il risultato di una indesiderata distorsione della sinusoide di ingresso, avrebbe senso definire il coefficiente di distorsione Δ come rapporto fra il valore efficace delle armoniche superiori alla prima (fondamentale) e il valore efficace di quest'ultima:

$$\Delta A = \text{Simplify}\left[\frac{\text{Sqrt}[\text{Apply}[\text{Plus}, \text{valeffA}^2] - \text{valeffA}[[1]]^2]}{\text{valeffA}[[1]]}, \text{ViM} > 0\right]; \text{scrivil}["\Delta A"]$$

$$\Delta A = \frac{4\sqrt{26}}{15\pi} = 43.3\%$$

$$\Delta B = \frac{\text{Sqrt}[\text{Apply}[\text{Plus}, \text{valeffB}^2] - \text{valeffB}[[1]]^2]}{\text{valeffB}[[1]]}; \text{scrivil}["\Delta B"]$$

$$\Delta B = 0.515112 = 51.5\%$$

Con riferimento al caso C, l'equazione

eq

$$V_u = V_i - VT \text{Log}\left[1 + \frac{V_u}{IS R}\right]$$

è stata risolta numericamente usando l'istruzione `FindRoot`, che utilizza un metodo di risoluzione iterativa detto "di Newton".

Un algoritmo meno raffinato ma facilmente utilizzabile, per un fissato valore di V_i , anche con l'ausilio di una semplice calcolatrice tascabile, consiste nell'applicare ripetutamente, cominciando con un prescelto valore di V_u , la funzione

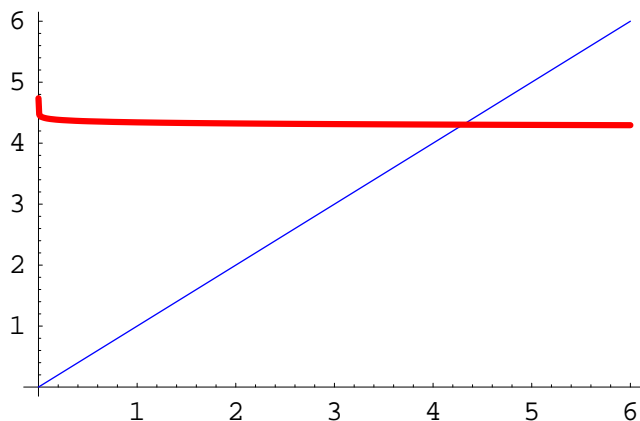
$$F[V_u_] := V_i - VT \text{Log}\left[1 + \frac{V_u}{IS R}\right] /. \text{dati}$$

Per esempio:

$$V_i = 5;$$

Si tratta di trovare le coordinate del punto di intersezione dei seguenti grafici, che è il "punto di equilibrio" o "punto fisso" della mappa iterativa $V_u^{k+1} = V_i - VT \text{Log}\left[1 + \frac{V_u^k}{IS R}\right]$.

`Plot[{x, F[x]}, {x, 0, 6}, PlotStyle -> ps1];`



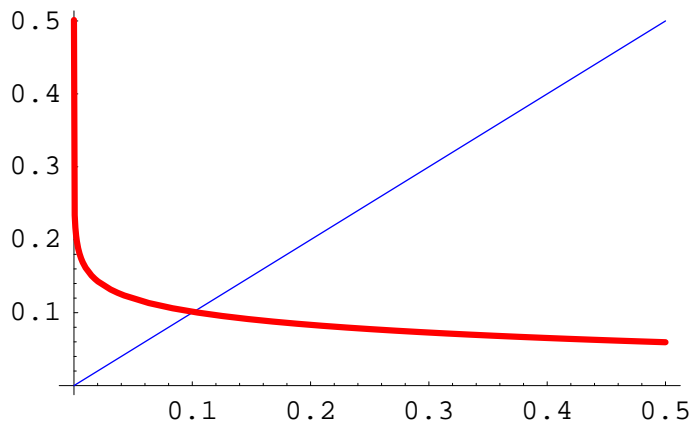
Questi sono i risultati di 4 iterazioni partendo da $V_u = 5V$:

`NestList[F, 5, 4]`

```
{5, 4.29962, 4.30354, 4.30352, 4.30352}
```

In questo caso l'algorithm converge rapidamente verso il punto fisso. Invece:

```
Vi = 0.7; Plot[{x, F[x]}, {x, 0, 0.5}, PlotStyle -> ps1];
```



```
NestList[F, 5, 15];
```

```
Chop[%, 10^-5]
```

```
{5, -0.000384722, 0.245898 - 0.0816814 i, 0.0765738 + 0.00833841 i,  
0.108114 - 0.00282013 i, 0.0992905 + 0.000678047 i, 0.101512 - 0.000177549 i,  
0.100938 + 0.000045475 i, 0.101085 - 0.0000117137 i, 0.101047,  
0.101057, 0.101054, 0.101055, 0.101055, 0.101055, 0.101055}
```

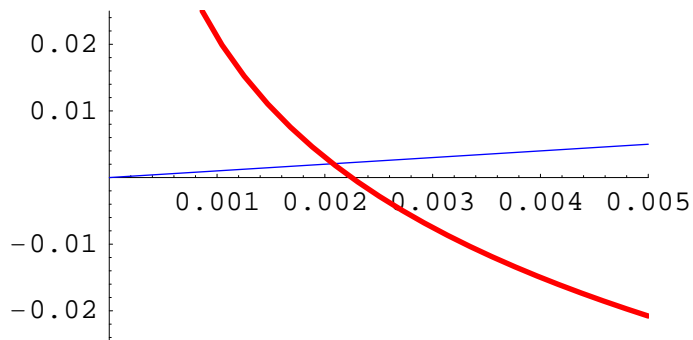
Con questi valori numerici, prima di giungere a convergenza l'argomento del logaritmo diviene negativo; *Mathematica* è in grado di superare la difficoltà, ma una semplice calcolatrice tascabile generalmente no. Però, se il valore di partenza è più sensato, va tutto bene:

```
NestList[F, 0, 15]
```

```
{0, 0.7, 0.0507342, 0.118971, 0.0968115, 0.10217, 0.10077, 0.101129, 0.101036,  
0.10106, 0.101054, 0.101055, 0.101055, 0.101055, 0.101055, 0.101055}
```

Infine, con un valore di Vi ancora più piccolo,

```
Vi = 0.5; Plot[{x, F[x]}, {x, 0, 0.005},  
PlotStyle -> ps1, PlotRange -> {{0, 0.005}, {-0.025, 0.025}}];
```



la soluzione c'è:

```
EngineeringForm[F[2.075614309 10 ^-3], 11]
```

```
2.0756143096 × 10-3
```

ma le iterazioni

```
NestList[F, 0.0020756143096, 20]
```

```
{0.00207561, 0.00207561, 0.00207561, 0.00207561, 0.00207563, 0.00207544, 0.00207775,  
0.00204884, 0.00241314, -0.00184189, 0.00518169 - 0.0816814 i, -0.0934634 + 0.0391935 i,  
-0.0990204 - 0.0713575 i, -0.103854 + 0.0654459 i, -0.104003 - 0.0670613 i,  
-0.104212 + 0.0667909 i, -0.104219 - 0.0668625 i, -0.104228 + 0.0668505 i,  
-0.104228 - 0.0668537 i, -0.104229 + 0.0668532 i, -0.104229 - 0.0668533 i}
```

non convergono a tale valore reale. La ragione è che il punto fisso reale è instabile; la stabilità del punto fisso, infatti, richiede che il modulo della derivata $F'[Vu]$ nel punto fisso sia minore di 1. Nel caso presente:

```
Vi = . ; md = Abs[D[eq[[2]], Vu]]
```

$$\text{Abs}\left[\frac{VT}{IS R \left(1 + \frac{Vu}{IS R}\right)}\right]$$

```
md /. dati /. Vu -> 2.07561431 * 10-3
```

(* è instabile *)

```
md /. dati /.
```

```
Vu -> -0.104229 - 0.0668533 i
```

(* è stabile ma non ha significato fisico *)

```
12.5264
```

```
0.209971
```

```
Flatten[Solve[md == 1, Vu]]
```

```
% /. dati
```

- Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. More...

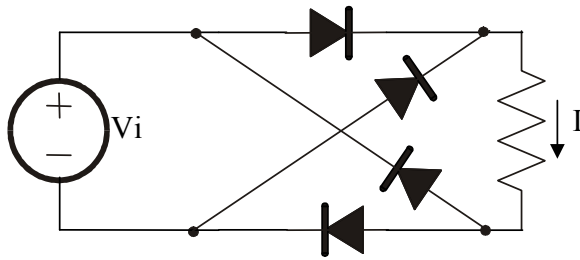
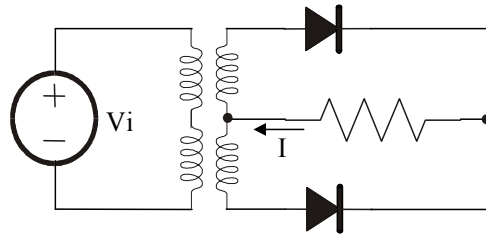
```
{Vu -> -IS R - VT, Vu -> -IS R + VT}
```

```
{Vu -> -0.026, Vu -> 0.026}
```

Nel caso che stiamo esaminando, quindi, sono instabili i punti di equilibrio con $0 \leq Vu \leq VT - IS \cdot R \cong VT$.

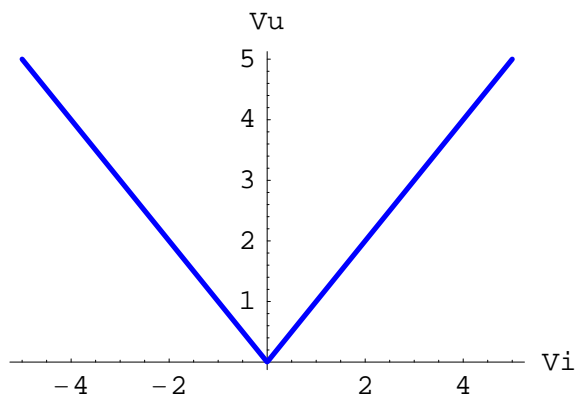
Raddrizzatori a onda intera.

Possono essere realizzati sia con un trasformatore dotato di secondario a presa centrale, sia con un ponte di diodi:

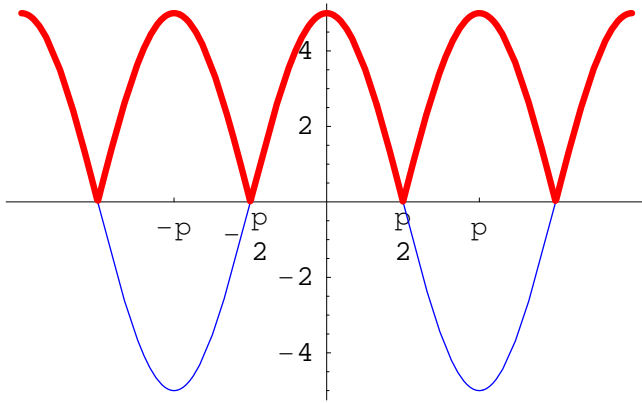
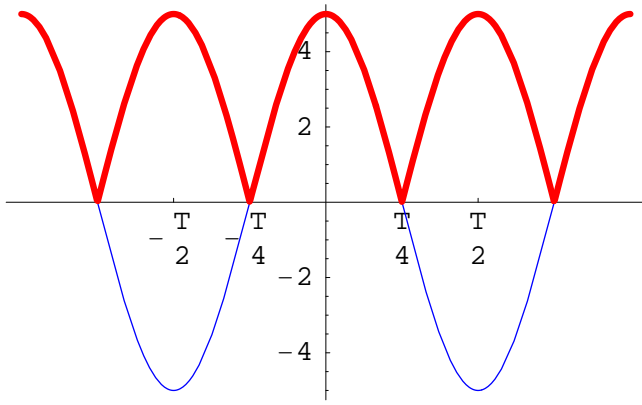


Con il modello a soglia nulla si riconosce facilmente, ragionando come nel primo caso esaminato, che

```
Vu[Vi_] := Abs[Vi]
Plot[Vu[Vi] /. dati, {Vi, -5, 5},
  PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesLabel -> {"Vi", "Vu"}];
```



```
Plot[Evaluate[{Vi[t], Vu[Vi[(t)]]} /. dati], {t, -Tn, Tn},
  Ticks -> {{{-Tn/2, "-T/2"}, {-Tn/4, "-T/4"}, 0, {Tn/4, "T/4"}, {Tn/2, "T/2"}}, Automatic},
  PlotStyle -> ps1];
Plot[Evaluate[{Vi[alpha / (2 pi f)], Vu[Vi[alpha / (2 pi f)]]} /. dati], {alpha, -2 pi, 2 pi},
  Ticks -> {{-pi, "-pi/2"}, 0, {pi/2, pi}}, Automatic, PlotStyle -> ps1];
```



Il resto dell'analisi viene lasciata al lettore come esercizio perché non richiede concetti nuovi.