Traccia della soluzione dell'esame del 1-7-2008

1) Il 2-porte in oggetto è formato dallo stadio a C.C. Q_1, con in serie la resistenza $r_2 = \frac{r_{BE}}{\beta_0 + 1}$ di Q_2 connesso a diodo, con in cascata lo stadio a B.C. Q_3 avente per carico R. Il guadagno di tensione è dato dal prodotto del guadagno del primo stadio, avente per carico la serie di r_2 con la resistenza d'ingresso dello stadio a B.C. pari a $R_{iBC} = \frac{r_{BE}}{\beta_0 + 1}$, per il guadagno del partitore resistivo formato da r_2 e da R_{iBC}, per il guadagno del B.C.

Si ha

$$A_{vCA} = \frac{(\beta_0 + 1)(r_2 + R_{iBC})}{r_{BE} + (\beta_0 + 1)(r_2 + R_{iBC})} \frac{R_{iBC}}{r_2 + R_{iBC}} \frac{\beta_0 R}{r_{BE}} = \frac{\beta_0 R}{3r_{BE}}$$

dove le r_{BE} dei tre BJT sono uguali in quanto le correnti di collettore a riposo ed i parametri del modello sono uguali. La resistenza d'ingresso è quella dello stadio a C.C. comune e coincide con il denominatore dell'espressione del guadagno di tensione del primo stadio, quindi

$$G_i = \frac{1}{3r_{BE}}.$$

La resistenza d'uscita è data dal parallelo di R con la resistenza d'uscita dello stadio a B.C., che però è infinita nel modello a due parametri qui considerato. Quindi

$$G_u = \frac{1}{R}.$$

2) Dall'espressione di G_u si ricava immediatamente R = 10 kΩ. Inoltre, ricordando che $r_{BE} = \frac{\beta_F V_T}{I_{C0}}$, dall'espressione del guadagno di tensione si ricava I_{C0} = 0.75 mA, da cui $V_{BE} = V_T \ln(I_{C0}/I_S)$ = 0.684 V. Infine $V_{i0} = -3V_{BE} = -2.052\,\text{V}$ e $V_{u0} = V_{CC} - RI_{C0} = 2.5\,\text{V}$. Si verifica immediatamente che tutti e tre i BJT sono in regione normale.

3) Si rammentino le formule dell'ammettenza d'ingresso, di quella d'uscita e del guadagno di tensione a vuoto di un 2-porte descritto dalla matrice delle ammettenze:

$$Y_i = y_i - \frac{y_r y_f}{y_o + Y_C},\ Y_u = y_o - \frac{y_r y_f}{y_i + Y_G},\ A_{vCA} = \frac{-y_f}{y_o}.$$

Per il nostro 2-porte l'ammettenza d'ingresso non dipende dal carico, così come l'ammettenza d'uscita non dipende dall'ammettenza della sorgente, quindi y_r = 0, cioè il 2-porte è unilaterale. Quindi $y_i = Y_i = G_i = \frac{1}{3r_{BE}}$, $y_o = Y_u = G_u = \frac{1}{R}$, $y_f = -A_{vCA}\, y_o = \frac{-\beta_0}{3r_{BE}}$.

4) L'ammettenza della capacità C connessa tra il terminale d'ingresso e quello d'uscita va sommata ai termini sulla diagonale principale e sottratta a quelli sulla diagonale secondaria della matrice delle ammettenze prima calcolata. Quindi risulta:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3r_{BE}} + sC & -sC \\ -\frac{\beta_0}{3r_{BE}} - sC & \frac{1}{R} + sC \end{bmatrix}.$$

5) Nel caso considerato l'equazione caratteristica si ottiene annullando il determinante della matrice delle ammettenze. Utilizzando la matrice sopra calcolata si ottiene la soluzione

$s = -\frac{1}{C}\frac{1}{3r_{BE} + R(1-\beta_0)} > 0$, quindi il circuito risulta instabile.

6) E’ facile verificare che nel punto di riposo considerato l’opamp lavora in regione di alto guadagno. Il guadagno di tensione si calcola così:

$$V^+ = V_i \frac{1/sC}{R+1/sC} = \frac{V_i}{1+sRC}$$

$$V^- = \frac{V_i + V_u}{2}$$

$$V^+ = V^-$$

da cui $A_v = \dfrac{1-sRC}{1+sRC}$.

7) $V_u(t) = V_{iM} \left| A_v\left(\dfrac{j}{RC}\right) \right| \cos\left\{ \dfrac{t}{RC} + \arg\left[A_v\left(\dfrac{j}{RC}\right) \right] \right\} = \cos\left\{ \dfrac{t}{RC} - \dfrac{\pi}{2} \right\}$,

dove l’ampiezza del segnale d’ingresso V_{iM} vale 1, e dove il modulo e l’argomento del guadagno di tensione sono calcolati alla pulsazione $\omega = 1 / (RC)$. Pertanto il segnale d’uscita ha la stessa ampiezza di quello d’ingresso e risulta sfasato in ritardo di 90°. Si noti che, poiché la tensione di saturazione è 10 V, l’opamp non satura mai con l’ingresso assegnato.