

Sistemi fisici, modelli, circuiti.

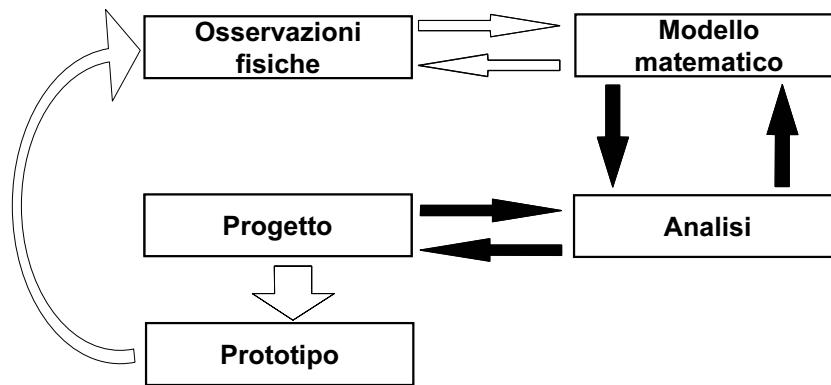


Fig. 1 - Studio di un sistema fisico.

Studio di un sistema fisico, progetto e analisi.

Lo studio completo di un sistema fisico comprende una fase strettamente "fisica" consistente in osservazioni sperimentali e misure, una fase "fisico-matematica" consistente nel determinare un modello matematico del sistema stesso⁽¹⁾, e una fase tipicamente "matematica" consistente nell'utilizzazione del modello al fine di prevedere il comportamento del sistema fisico in situazioni anche diverse da quelle originariamente osservate e, di particolare interesse per l'ingegnere, di individuare i criteri di progetto per la realizzazione di sistemi fisici dotati di prefissate proprietà (le "specifiche di progetto"). Con riferimento alla schematizzazione di figura 1, questo testo ha a che fare essenzialmente con le interazioni rappresentate dalle frecce nere e si atterrà, di regola, all'uso di modelli quanto più semplici sia possibile, purché in grado di fornire risultati non assurdi, al fine di concentrare l'attenzione sugli aspetti fondamentali.

Progettare un sistema fisico, cioè decidere come va realizzato, può significare sia definire l'insieme dei processi tecnologici che conducono allo scopo, sia definire un insieme di sistemi più semplici e già noti (dispositivi, componenti, sottosistemi) e di regole per comporli nel sistema voluto, sia un po' di entrambe le cose. In questo testo l'aspetto di gran lunga prevalente sarà il secondo ma si può affermare, includendo nei componenti in senso lato anche i processi tecnologici, che lo studente di discipline ingegneristiche deve subito prendere coscienza del fatto che per progettare è essenziale conoscere i componenti e saperne analizzare le interrelazioni. Soltanto nell'analisi numerica automatica (simulazione) occorre risolvere l'intero sistema di equazioni che descrive un circuito completo (cioè elettricamente isolato); nelle prime fasi del progetto occorre invece operare con carta e penna su strutture e modelli quanto più semplici possibile, altrimenti si perde di vista l'influenza dei singoli componenti sul comportamento globale, e quindi non si sa come apportare via via le modifiche necessarie. Occorre pertanto aver studiato e conoscere bene le proprietà di un buon numero di componenti (o sottocircuiti) relativamente semplici, saper suddividere il circuito in componenti noti e individuare le equazioni che esprimono i vincoli che la struttura del circuito impone ai suoi componenti. In particolare, non esiste progetto significativo che possa essere eseguito semplicemente scrivendo e risolvendo simbolicamente un sistema di equazioni: si richiederà sempre una successione ricorrente di composizione di elementi semplici, analisi, verifiche e modifiche prima di poter ottenere il risultato desiderato cioè il soddisfacimento (teorico) delle specifiche di progetto (la successiva, indispensabile, verifica sperimentale esula dagli scopi di questo testo).

¹Si può notare che la costruzione di un modello comincia in realtà nel momento stesso in cui si scelgono le proprietà del sistema fisico che debbono essere oggetto di studio: ad esempio, la decisione di studiare un sistema elettromagnetico piuttosto che un sistema meccanico o un sistema termico può anche riferirsi al medesimo insieme di oggetti fisici. È bene anche tener sempre presente che un modello può fallire il suo scopo non soltanto se è troppo semplice per interpretare con la voluta approssimazione la realtà fisica che vuole rappresentare, ma anche se è troppo complicato per poter essere elaborato in modo efficiente al fine di trarne previsioni e quindi criteri di progetto: il modello migliore è quello che offre il miglior compromesso fra l'accuratezza e la semplicità.

Chi desidera approfondire l'argomento dei modelli matematici può utilmente consultare: **E. Sarti**: *Appunti di Controlli automatici*, Soc. Ed. Esculapio, e **R. Guidorzi**: *Multivariable System Identification*, Bononia University Press, nei quali è ampiamente trattato ed esemplificato.

Avvertiamo infine lo studente di non lasciarsi troppo turbare dalle approssimazioni usate per semplificare i modelli matematici perché la congruenza fra modello e sistema fisico può anche essere ottenuta, in una certa misura, realizzando il sistema in modo che le ipotesi su cui si fonda il modello siano adeguatamente soddisfatte.

Circuiti elettr(on)ici analogici a parametri concentrati e costanti.

Nel caso dei circuiti oggetto di questo testo, le idee fondamentali che conducono al modello possono essere così riassunte:

1. Si assume che le grandezze fisiche siano rappresentate da funzioni ordinarie⁽²⁾ a valori reali, generalmente derivabili più volte, del punto $P(x,y,z)$ di uno spazio euclideo tridimensionale e del tempo t . Ciò definisce un *modello analogico a parametri distribuiti*, per il quale si dovranno scrivere, in generale, delle relazioni differenziali alle derivate parziali.
2. Si decide di esaminare le proprietà elettromagnetiche di un sistema fisico, cioè si sceglie come modello un *sistema elettromagnetico* (ma per il progetto completo di un circuito elettronico si dovranno a un certo punto anche "fare i conti" con problemi, e quindi con modelli, termici e meccanici).
3. Si ritiene che gli effetti quantistici e relativistici possano essere trascurati, scegliendo con ciò il modello di un *sistema elettromagnetico classico*. Il modello si fonderà quindi sulle equazioni di Maxwell e su quelle che esprimono le proprietà elettromagnetiche macroscopiche della materia.
4. Presumendo che le dimensioni fisiche del sistema siano molto minori della lunghezza d'onda delle oscillazioni elettromagnetiche, un'approssimazione quasi-stazionaria consente di trascurare i fenomeni di irradiazione e propagazione del campo elettromagnetico e di esprimere la sua densità di energia come somma di una densità di energia elettrica e di una densità di energia magnetica.
5. Con un'approssimazione poi di tipo "regionale"⁽³⁾, l'energia elettrica si considera non nulla soltanto in certe regioni, limitate, dello spazio (**condensatori**), l'energia magnetica in altre (**induttori**) e in altre regioni ancora si considerano concentrate la dissipazione di energia elettrica in calore ceduto all'ambiente esterno al circuito (**resistori**) e la cessione di energia elettrica da parte di sistemi fisici esterni al circuito (**generatori indipendenti, di tensione e di corrente**).

Tutto ciò consente di sostituire alle funzioni del punto e del tempo un insieme di funzioni solo del tempo e quindi alle relazioni differenziali alle derivate parziali delle relazioni differenziali alle derivate ordinarie rispetto al tempo.

Si ottiene allora il modello *circuito elettr(on)ico*⁽⁴⁾ *analogico*⁽⁵⁾ *a parametri concentrati*.

In particolare, e a chiarimento di quanto ora detto, si ricordi che

- a ogni condensatore è associata una carica elettrica $Q(t)$ e una corrente elettrica $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$,
- a ogni induttore è associato un flusso magnetico concatenato autoindotto $\Phi(t)$ e una tensione elettrica $V(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$,

²Modelli più generali utilizzano funzioni generalizzate (distribuzioni).

³Quando un certo fenomeno fisico ha importanza prevalente in certe regioni dello spazio e minore in altre, si possono considerare modelli in cui il fenomeno viene completamente trascurato in tutte le regioni in cui ha minor importanza, introducendo quindi delle discontinuità sui contorni; tali approssimazioni si sono dimostrate utili in molti e diversificati contesti.

⁴La distinzione fra "elettrico" ed "elettronico" non si riferisce a modelli qualitativamente diversi: semplicemente è consueto definire "elettronici" i circuiti elettrici che contengono dispositivi tipici dell'Elettronica quali diodi, transistori, ecc ...

⁵I modelli digitali utilizzano invece funzioni i cui valori appartengono a un insieme discreto.

- in presenza di tali componenti, detti *reattivi*, il sistema di equazioni è differenziale e la sua risoluzione, cioè integrazione, dà luogo a funzioni del tempo il cui valore ad ogni istante dipende anche dai valori assunti in precedenza: il circuito è perciò dotato di *memoria dinamica*,
- in assenza di tali elementi reattivi il sistema di equazioni non è differenziale e il circuito può essere detto *adinamico*⁽⁶⁾,

Il suddetto modello consiste dunque, in generale, in un sistema differenziale non lineare di equazioni alle derivate ordinarie rispetto al tempo nel quale le funzioni incognite rappresentano differenze di potenziale elettrico (tensioni), correnti elettriche, cariche elettriche, flussi di induzione magnetica. Nelle equazioni figurano ovviamente anche delle grandezze note, i così detti *parametri*, che sono determinate dalla struttura fisica del sistema e, in generale, anche la variabile indipendente "tempo" in modo esplicito. Si tratta quindi, in generale, di equazioni *tempo-varianti*, tuttavia nella maggioranza dei modelli di circuiti elettronici, e in tutti quelli di cui si tratta in questo testo, si suppone che il tempo figurì esplicitamente soltanto nei parametri relativi ad alcuni generatori indipendenti che modellano l'influenza sul circuito in esame di sistemi esterni al circuito stesso, il quale viene quindi considerato, di per sè, *tempo-invariante*. Si tratta dei modelli detti *a parametri costanti*.

D'ora in poi con il vocabolo "circuito" si indicherà un modello di **circuito a parametri concentrati e costanti** e si supporrà inoltre che il circuito sia **connesso**, cioè non costituito di due o più sottocircuiti che siano tra loro elettricamente isolati.

Un breve cenno alla struttura fisica dei circuiti elettronici.

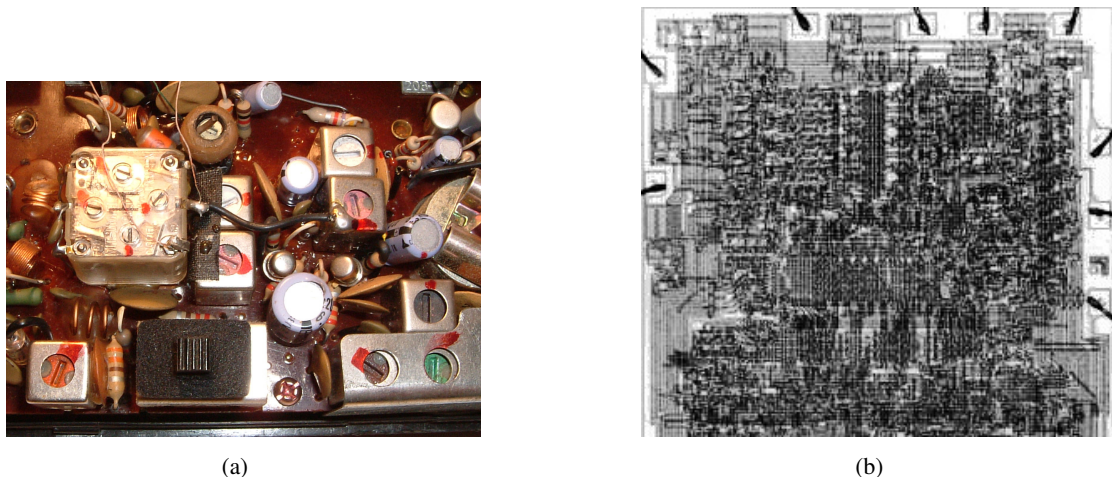


Fig. 2 - a) Parte di un circuito a componenti discreti, b) ingrandimento di parte di un circuito integrato monolitico.

I circuiti *a componenti discreti* vengono costruiti collegando elettricamente degli oggetti fisicamente distinti (i **componenti**) che possono essere dispositivi elettr(on)ici (resistori, induttori, condensatori, trasformatori, generatori, relè, diodi, transistor, dispositivi fotoelettrici, trasduttori di vario genere ...) oppure **connessioni** a bassissima resistenza, e quindi assimilabili a cortocircuiti, realizzate utilizzando materiali, per lo più metallici, ad elevata conducibilità.

La realizzazione contemporanea di più componenti con un medesimo processo tecnologico viene detta **integrazione**.

⁶I modelli adinamici (c'è chi li chiama "algebrici" ma le equazioni sono spesso trascendenti ...) sono molto utili ma possono essere incapaci di prevedere comportamenti importanti dei circuiti giustificabili solo con la presenza di effetti reattivi comunque piccoli ma non nulli. Ad esempio, le memorie statiche si possono studiare sotto molti aspetti come circuiti adinamici ma non si capirebbe come in pratica usarle se non si tenesse presente l'esistenza di qualche piccolo elemento reattivo.

Nei circuiti *stampati* sono integrate solo le connessioni; nei circuiti integrati *ibridi* (a *film spesso* o a *film sottile*) sono integrate le connessioni e alcune categorie di componenti *passivi* (soprattutto resistori e condensatori); nei circuiti integrati *monolitici* tutti i componenti (connessioni, resistori, condensatori, diodi, transistor, ...) vengono realizzati con una medesima successione di processi tecnologici generalmente dentro e sopra un monocristallo di Silicio.

Descrizione di un circuito.

Il modello di un circuito è dunque essenzialmente costituito da un sistema di equazioni differenziali, tuttavia

- in sede di individuazione del modello è praticamente impossibile scrivere direttamente le equazioni basandosi sull'osservazione del sistema fisico;
- in sede di progetto è praticamente impossibile operare scrivendo e modificando direttamente le equazioni;
- in sede di analisi del modello è assai scomodo e laborioso simulare numericamente il comportamento del circuito usando un generico risolutore numerico di equazioni differenziali nel quale occorra ogni volta introdurre le equazioni del modello.

A tali inconvenienti si rimedia utilizzando delle opportune rappresentazioni alternative del modello, le quali possono essere di tipo grafico, e cioè gli **schemi elettrici**, oppure di tipo alfanumerico (**netlist**) secondo un linguaggio convenzionale che può essere interpretato da un apposito risolutore numerico.

Schemi elettrici.

Sono strumenti praticamente indispensabili per scrivere ed elaborare efficacemente i modelli matematici dei circuiti. Hanno avuto origine come rappresentazione grafica schematica della struttura fisica di un circuito a componenti discreti con una stretta correlazione fra i simboli grafici associati ai diversi componenti e l'individualità fisica dei singoli componenti reali; per un circuito integrato, tuttavia, una tale corrispondenza è assai meno stretta: un circuito monolitico, in particolare, ha una struttura in gran parte continua e la sua rappresentazione con uno schema elettrico implica una discretizzazione ideale della struttura fisica, cioè una tipica operazione di modellistica. Conviene allora considerare uno schema elettrico come una rappresentazione grafica del modello matematico del circuito che si vuole analizzare e/o progettare. Ciascun componente è rappresentato da un simbolo grafico associato alla classe di relazioni

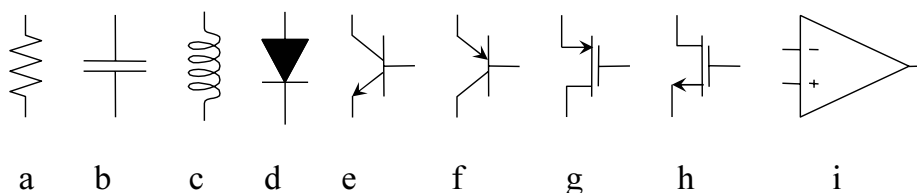
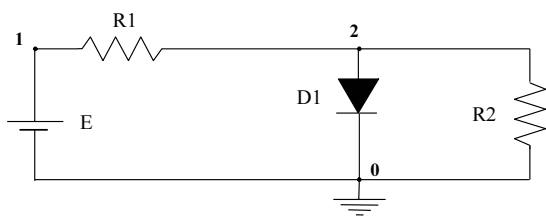


Fig. 3 - Esempi di simboli per dispositivi elettronici: a) resistore; b) condensatore; c) induttore; d) diodo a giunzione p/n; e) transistor bipolare *npn*; f) transistor bipolare *pnp*; g) transistor MOS a canale *p*; h) transistor MOS a canale *n*; i) amplificatore operazionale.

costitutive utilizzabili per quel tipo di componente (le effettive relazioni da usare e i valori numerici dei parametri che esse utilizzano debbono necessariamente essere dichiarate in forma alfanumerica); il simbolo è dotato di *terminali* o *poli* che sono connessi agli altri terminali mediante linee che rappresentano conduttori a resistenza nulla, e quindi equipotenziali (cortocircuiti). Due o più terminali fra loro connessi e le relative linee di interconnessione rappresentano un *nodo* del circuito. La topologia che ne risulta è in corrispondenza univoca con le leggi di Kirchoff del circuito, che sarebbe molto più arduo tradurre in equazioni senza l'uso dello schema, e ciò costituisce uno dei maggiori pregi degli schemi elettrici.

Come avviene in generale per tutte le rappresentazioni grafiche, gli schemi elettrici sono sintetici e intuitivi ma relativamente lenti da disegnare e soprattutto la loro utilizzazione informatica comporta notevole occupazione di memoria e modesta compatibilità.

Netlist.

(a)

```

VE 1 0 DC 5V
R1 1 2 2K
D1 2 0 nome del modello
.MODEL nome del modello D [parametri]
R2 2 0 1K

```

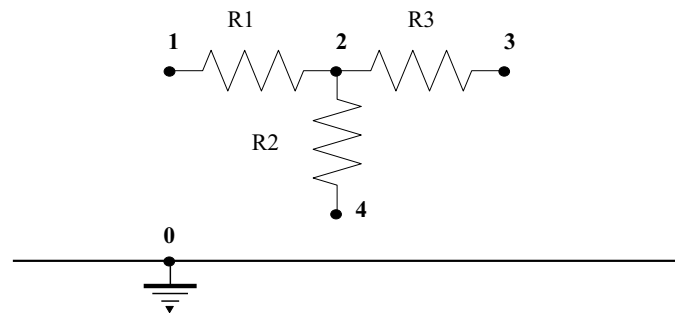
(b)

Fig. 4 - Un semplice schema elettrico (a) e la sua *netlist* (b) .

Nella figura 4 sono riportati lo schema e la *SPICE-netlist* di un circuito molto semplice ma sufficiente a illustrare che la descrizione alfanumerica è basata su

- l'identificazione del componente per mezzo della lettera iniziale del suo nome,
- la convenzione che il nodo di riferimento per le tensioni sia indicato dallo 0,
- la dichiarazione dei nodi (arbitrariamente numerati) cui il componente è connesso,
- la dichiarazione del tipo e dei parametri dei modelli.

Si capisce facilmente che una siffatta descrizione, a differenza dello schema elettrico, consente un'immediata lettura dei modelli dei componenti ma rende praticamente impossibile scrivere a vista le equazioni di Kirchoff, però i file hanno piccola dimensione ed alta compatibilità anche perché il linguaggio di SPICE è diventato quasi uno standard cui si adattano molti simulatori di circuiti diversi da SPICE stesso.

Suggerimenti per scrivere le equazioni di un circuito.**Fig. 5** - Un nodo per il quale è possibile scrivere l'equazione nodale $\frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_4 - V_2}{R_2} + \frac{V_3 - V_2}{R_3} = 0$.

Bisogna cercare di scrivere equazioni che siano facilmente identificabili osservando la descrizione grafica del circuito e di mantenere il loro numero (e quindi il corrispondente numero delle incognite) il più piccolo possibile. A tale scopo conviene fare riferimento alle equazioni nodali e alle equazioni nodali modificate (anche diversi simulatori di circuiti, tra i quali SPICE, utilizzano una procedura sistematica per determinare un sistema di tali equazioni). Si proceda allora come segue. Fra gli n nodi del circuito se ne sceglie uno come nodo di riferimento (massa, terra) e lo si chiama 0 (zero). Gli altri $n - 1$ nodi vengono numerati in ordine arbitrario. Le tensioni fra questi e il nodo di riferimento sono le $n - 1$ **tensioni di nodo**.

Si scrivono le relazioni di Kirchoff per le correnti relative a tali $n - 1$ nodi, utilizzando, per quanto possibile, le relazioni costitutive dei rami per esprimere le correnti in funzione delle tensioni di nodo. Se ciò è possibile, si

ottiene un sistema di $n - 1$ equazioni nodali con incognite le $n - 1$ tensioni di nodo; una volta risolto il sistema, dalla conoscenza delle tensioni di nodo, dalle relazioni di Kirchoff per le maglie e dalle relazioni costitutive dei rami si possono ricavare tutte le altre grandezze incognite.

Si noti però che

- i nodi che congiungono solo due bipoli possono spesso essere trascurati considerando un unico ramo con i due bipoli in serie, eliminando così una equazione e una incognita;
- se un ramo contiene un generatore indipendente di tensione, esso rende nota una tensione di nodo oppure la differenza fra due tensioni di nodo: è facile quindi eliminare un'equazione e un'incognita;
- può essere impossibile o almeno poco conveniente attenersi rigorosamente alle equazioni nodali: occorre allora includere fra le incognite anche qualche corrente di ramo e includere fra le equazioni le corrispondenti relazioni costitutive dei rami interessati, anche se così facendo si ottiene un sistema di equazioni un po' più grande. Si parla allora di **equazioni nodali modificate**;
- in particolare, le equazioni nodali modificate possono essere utili quando il circuito contiene rami controllati da una corrente e quando si scrivono le equazioni differenziali di un circuito che contiene induttori.

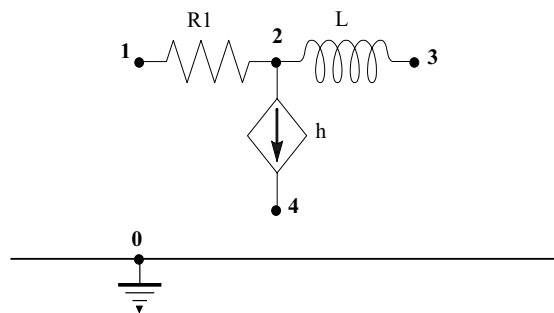


Fig. 6 - Un nodo per il quale si devono scrivere equazioni nodali modificate: $\frac{V_1 - V_2}{R_1} - h + I_L = 0$; $V_3 - V_2 - L \frac{dI_L}{dt} = 0$.

Tensioni di nodo e schemi elettrici.

L'uso sistematico delle tensioni di nodo ha prodotto delle convenzioni grafiche che influiscono sulla topologia degli schemi elettrici. Per la corretta interpretazione di uno schema elettrico occorre, in particolare, tenere presente che uno stesso nome, numero o simbolo ripetuto in corrispondenza di quelli che sembrano essere nodi distinti indica invece che si tratta di un unico nodo, cui è ovviamente associata un'unica tensione di nodo, il cui nome può essere indicato presso una sola delle diverse rappresentazioni grafiche del nodo stesso. In particolare, il simbolo grafico di un generatore di tensione che abbia un terminale coincidente con il nodo di riferimento può essere sostituito con l'indicazione del valore (numerico o simbolico) e della polarità posti accanto al nodo cui è connesso l'altro terminale. Si vedano in proposito le figure 7 e 8.

Aggiornato al 28 dicembre 2004

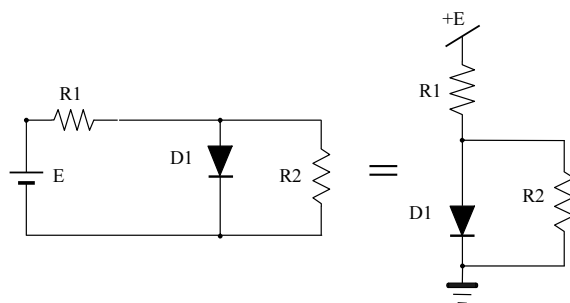


Fig. 7 - Queste due rappresentazioni grafiche di un circuito elettricamente isolato sono equivalenti.

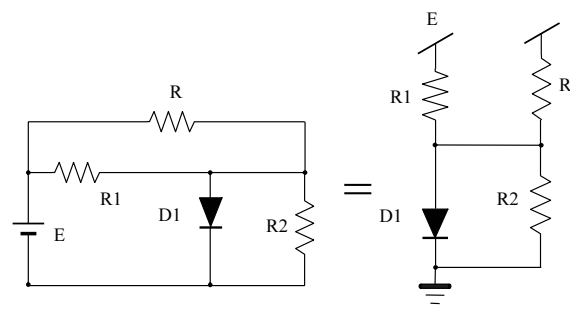


Fig. 8 - Anche questi due schemi sono equivalenti ed entrambi rappresentano un circuito elettricamente isolato.