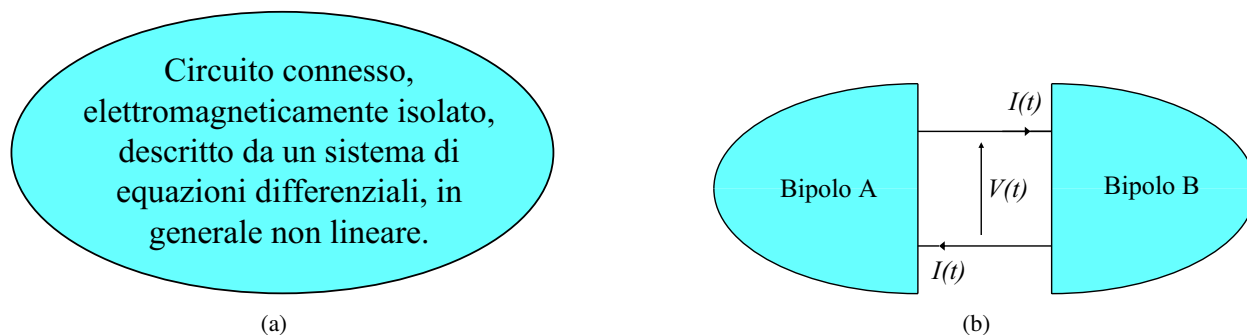


## Bipoli.



**Fig. 1** - Un circuito (a) suddiviso in due bipoli (b).

L'oggetto che appare nella figura 1(a) vuole indicare sinteticamente un circuito elettromagneticamente isolato e connesso che si vuole analizzare, intendendo con ciò non necessariamente l'integrazione del sistema a partire da prefissate condizioni iniziali ma anche, più semplicemente, una qualche elaborazione intesa a semplificare il problema e/o a ricavare utili indicazioni per il progetto. Il circuito è descritto da un sistema di  $n$  equazioni differenziali in altrettante funzioni incognite del tempo e pertanto si può interpretare il disegno come una rappresentazione grafica di tale sistema. La figura 1(b) rappresenta il medesimo circuito come connessione di due sottocircuiti a 2 terminali (bipoli) e deve quindi essere un'altra rappresentazione grafica del medesimo sistema di equazioni tale da fornire su di esso alcune ulteriori informazioni: quali? C'è un solo modo di dare un utile significato a tale figura: essa deve indicare che

- le funzioni incognite  $V(t)$  e  $I(t)$  sono presenti fra quelle che appaiono nel sistema di equazioni e si desidera determinare preliminarmente o esclusivamente proprio queste incognite, pertanto le  $n$  equazioni hanno come incognite  $V(t), I(t)$  e altre  $n - 2$  funzioni del tempo interne ai due bipoli;
- il sistema di equazioni è costituito da due sottosistemi che hanno in comune  $V(t)$  e  $I(t)$  **ma sono per il resto completamente indipendenti** cioè nessun'altra grandezza, incognita o nota, appare in entrambi i sottosistemi.



**Fig. 2** - Il modello di figura 1 può essere costruito determinando prima due modelli più semplici.

Il bipolo A sarà quindi descritto da  $n_A$  **relazioni costitutive** fra  $V(t)$ ,  $I(t)$  e altre  $n_A - 1$  funzioni incognite "interne"; analogamente il bipolo B sarà descritto da  $n_B$  relazioni costitutive in  $V(t), I(t)$  e altre  $n_B - 1$  funzioni incognite "interne"; con, ovviamente,  $n_A + n_B = n$ . In certi casi, particolari ma frequenti e importanti, non esistono altre variabili oltre  $V(t), I(t)$  oppure le variabili interne possono essere eliminate dando luogo a una sola relazione costitutiva fra le grandezze "ai terminali"  $V(t), I(t)$  per l'uno ( $n_A = 1$ ) o l'altro ( $n_B = 1$ ) o entrambi i bipoli ( $n_A = n_B = 1$ ) e in quest'ultimo caso il circuito di figura 1 è descritto da due equazioni nelle due incognite  $V(t), I(t)$ , ciascuna equazione essendo fornita dalla relazione costitutiva di uno dei due bipoli. Anche se in generale ciò non è possibile, rimane il fatto che il sistema di relazioni costitutive di un bipolo equivale, ai fini del bilancio equazioni/incognite e ai fini del calcolo di  $V(t)$  e  $I(t)$ , a una relazione fra le due grandezze ai terminali. Diremo pertanto, d'ora in poi, che a ogni bipolo è associato un sistema costitutivo in due variabili, sottintendendo "ai terminali", e useremo un'analogia locuzione anche per componenti con più di due terminali.

Tutto ciò è particolarmente utile soprattutto se almeno uno dei due bipoli è già conosciuto e/o particolarmente semplice, ma consente comunque di suddividere il problema dell'analisi del circuito nei due problemi più semplici rappresentati graficamente nelle figura 2 il cui significato è: analizzare separatamente ciascun bipolo per ricavarne il relativo sistema costitutivo. Se poi in tale sistema la tensione  $V(t)$  è somma di due o più tensioni, il bipolo potrà essere a sua volta rappresentato come serie di due o più bipoli più semplici; dualmente, se la corrente  $I(t)$  è somma di due o più correnti, il bipolo potrà essere rappresentato come parallelo di due o più bipoli più semplici e così via.

Finora si è considerato il problema dell'analisi, ma è facile intuire che, disponendo di un limitato numero di relazioni costitutive elementari, è possibile, connettendo in serie e in parallelo bipoli via via più complessi, sintetizzare reti di bipoli e quindi sistemi di equazioni comunque grandi. Sebbene molti utili circuiti abbiano effettivamente la struttura di reti di bipoli, l'insieme dei circuiti elettronici è ben più ampio, come si vedrà. Nella figura 2 è usata la convenzione "normale" per assegnare i versi positivi alla tensione e alla corrente: essa è tale che negli istanti di tempo in cui  $V$  e  $I$  hanno lo stesso segno la potenza istantanea  $p(t) = V(t) \cdot I(t)$  risulta entrante nel bipolo.

In generale, le porzioni di superficie attraverso le quali transita energia elettromagnetica scambiata fra diversi sottocircuiti vengono dette **porte**; nel caso dei circuiti a parametri concentrati le porte sono coppie di terminali, per tali ragioni un bipolo è anche un (caso particolare di) **monoporta**.

## Bipoli notevoli.

### Resistori.

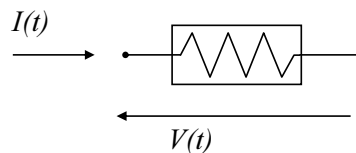


Fig. 3 - Resistore.

Con il simbolo di figura 3 si intende rappresentare un sottocircuito adinamico a 2 terminali, tale cioè che il suo sistema costitutivo consenta di determinare la tensione  $V(t)$  quando sia assegnata la corrente  $I(t)$  (resistore **a controllo di corrente**) oppure, viceversa, consenta di determinare la corrente  $I(t)$  quando sia assegnata la tensione  $V(t)$  (resistore **a controllo di tensione**). Nei casi più semplici e frequenti il sistema consiste in una sola relazione costitutiva espressa nella forma  $I \rightarrow V(I)$  oppure nella forma  $V \rightarrow I(V)$ , rispettivamente, con le funzioni  $I(V)$  e  $V(I)$  di norma continue e generalmente derivabili. Il grafico delle suddette funzioni nel piano cartesiano con  $V$  in ascissa e  $I$  in ordinata viene chiamato (**curva**) **caratteristica** del resistore. Si considerano poi i seguenti casi particolari.

- Resistore **passivo**: modella la dissipazione di energia elettrica in calore; la caratteristica passa per l'origine degli assi ed è tutta contenuta nel 1° e nel 3° quadrante perché  $V \cdot I \geq 0$ . In caso contrario si dice **attivo** e deve ovviamente contenere anche sorgenti di energia.
- Resistore attivo **asintoticamente passivo**: se è a controllo di corrente, esiste  $I_M$  tale che per  $|I| > I_M$  risulta  $\frac{dV(I)}{dI} \geq 0$ , se è a controllo di tensione, esiste  $V_M$  tale che per  $|V| > V_M$  risulta  $\frac{dI(V)}{dV} \geq 0$  cioè la caratteristica appartiene al 1° e al 3° quadrante per tensioni e correnti sufficientemente grandi. Se un resistore non è asintoticamente passivo, ammette la possibilità di generare una potenza infinitamente grande e non è quindi fisicamente realizzabile: occorre allora cautela se lo si vuole usare nel modello di un circuito.
- Resistore **lineare**: la relazione costitutiva è lineare (legge di Ohm:  $V(t) = \pm R \cdot I(t)$  o  $I(t) = \pm G \cdot V(t)$ ,  $R > 0$ ,  $G > 0$ ,  $R \cdot G = 1$  (i segni dipendono dalle convenzioni sui versi positivi di  $V$  e  $I$ )).  
Rappresentazione alfanumerica del resistore lineare:

R\* N+ N- valore in Ohm

- Generatore indipendente di tensione:** è un resistore a controllo di corrente con la relazione costitutiva  $V(t) = E(t) \forall I(t)$ ; la funzione nota del tempo (in particolare costante)  $E$  è detta **tensione impressa**, la caratteristica è una retta parallela all'asse  $I$  con ascissa  $E$ . Si tratta a rigore di un resistore non asintoticamente passivo, tuttavia la serie di un generatore di tensione indipendente e di un resistore lineare con resistenza comunque piccola ma non nulla è asintoticamente passivo e può quindi modellare un generatore reale. Se la tensione impressa è nulla, il generatore coincide con il resistore lineare a resistenza nulla e viene detto **cortocircuito**. Rappresentazione alfanumerica:

V\* N+ N- [DC valore in Volt AC valore in Volt  
+ SIN(...) o PULSE(...) o PWL(...) ...]

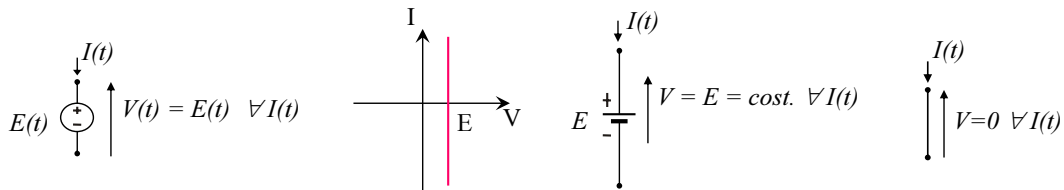


Fig. 4 - Generatore di tensione, caratteristica, generatore di tensione costante, cortocircuito .

- Generatore indipendente di corrente:** è un resistore a controllo di tensione con la relazione costitutiva  $I(t) = H(t) \forall V(t)$ ; la funzione nota del tempo (in particolare costante)  $H$  è detta **corrente impressa**, la caratteristica è una retta parallela all'asse  $V$  con ordinata  $H$ . Si tratta a rigore di un resistore non asintoticamente passivo, tuttavia il parallelo di un generatore di corrente indipendente e di un resistore lineare con resistenza comunque piccola ma non nulla è asintoticamente passivo e può quindi modellare un generatore reale. Se la corrente impressa è nulla, il generatore coincide con il resistore lineare a conduttanza nulla e viene detto **ramo aperto**. Rappresentazione alfanumerica:

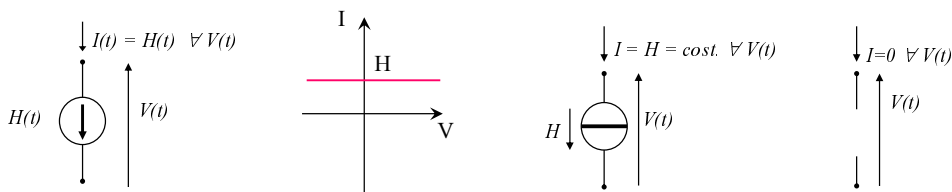


Fig. 5 - Generatore di corrente, caratteristica, generatore di corrente costante, ramo aperto.

I\* N+ N- [DC valore in Ampère AC valore in Ampère  
+ SIN(...) o PULSE(...) o PWL(...) ...]

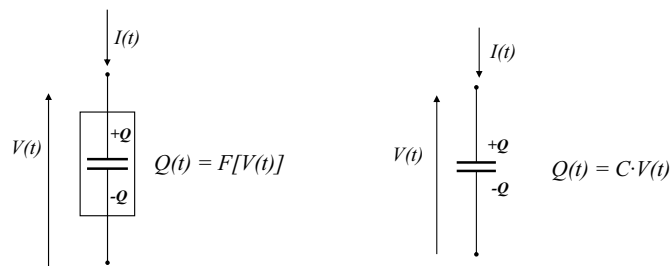


Fig. 6 - Condensatori.

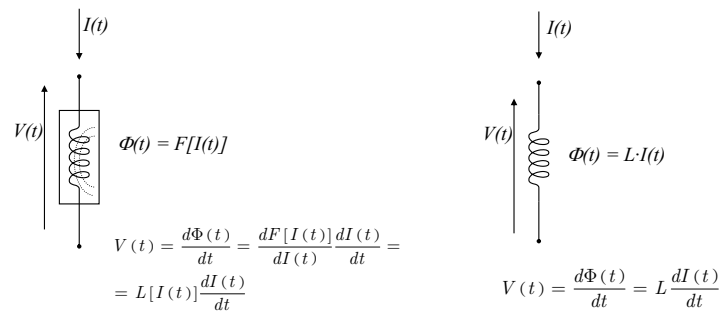
I dispositivi fisici che approssimano il comportamento dei resistori possono essere realizzati con diverse tecnologie: fili metallici, strati di metalli o di semiconduttori policristallini depositi su substrati isolanti, strati di opportune miscele con varie resistività depositi su substrati isolanti, regioni di semiconduttori monocristallini.

### Condensatori.

La corrente è la derivata rispetto al tempo di una carica elettrica che è funzione della tensione; modellano la possibilità di accumulare energia potenziale elettrica (si tratta quindi di bipoli reattivi, dinamici, con memoria). In particolare, se la carica è proporzionale alla tensione:  $Q(t) = C \cdot V(t)$ , si tratta di un condensatore lineare di capacità  $C$ .

Rappresentazione alfanumerica del condensatore lineare:

C\* N+ N- valore in Farad



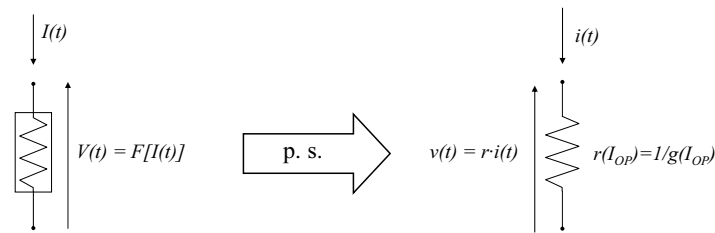
**Fig. 7 - Induttori.**

### Induttori.

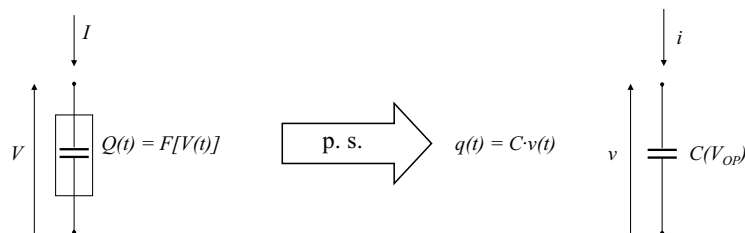
La tensione è la derivata rispetto al tempo del flusso di autoinduzione magnetica che è funzione della corrente; modellano la possibilità di accumulare energia potenziale magnetica (si tratta quindi di bipoli reattivi, dinamici, con memoria). In particolare se il flusso è proporzionale alla corrente:  $\Phi(t) = L \cdot I(t)$ , si tratta di un induttore lineare con induttanza  $L$ . Rappresentazione alfanumerica dell'induttore lineare:

L\* N+ N- valore in Henry

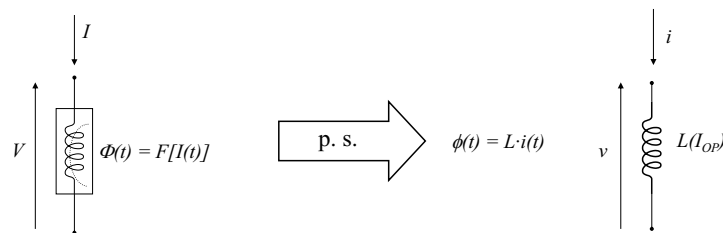
### Equivalenti per piccoli segnali di bipoli notevoli.



**Fig. 8** - Linearizzazione della relazione costitutiva di un resistore a controllo di corrente; per un resistore a controllo di tensione si ottiene un identico bipolo equivalente per piccoli segnali;  $r$  è la **resistenza differenziale**,  $g$  è la **conduttanza differenziale**.



**Fig. 9** - Linearizzazione della relazione costitutiva di un condensatore;  $C$  è la **capacità differenziale**.



**Fig. 10** - Linearizzazione della relazione costitutiva di un induttore;  $L$  è l'**induttanza differenziale**.

### Bipoli lineari.

- **Bipoli lineari autonomi in regime sinusoidale di prefissata pulsazione  $\omega_0$ .**

La relazione costitutiva è  $\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$  oppure  $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}$ , ove  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  sono i fasori associati alla tensione e alla corrente sinusoidali, rispettivamente, mentre  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  sono numeri complessi detti impedenza e ammettenza, rispettivamente, che soddisfano la relazione  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} = 1$ . Poiché il prodotto di due numeri complessi ha modulo uguale al prodotto dei moduli dei fattori e argomento uguale alla somma degli argomenti dei fattori, ne risulta, ad esempio, che una corrente  $I_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$  dà luogo alla tensione  $|\mathbf{Z}| \cdot I_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha + \angle \mathbf{Z})$ .

- **Bipoli lineari autonomi soggetti a grandezze trasformabili secondo Fourier.**

La relazione costitutiva è  $V(j\omega) = Z(j\omega) \cdot I(j\omega)$  oppure  $I(j\omega) = Y(j\omega) \cdot V(j\omega)$ , ove  $V(j\omega)$  e  $I(j\omega)$  sono le  $F$ -trasformate della tensione e della corrente, rispettivamente, mentre  $Z(j\omega)$  e  $Y(j\omega)$  sono funzioni complesse della variabile immaginaria  $j\omega$  dette impedenza e ammettenza, rispettivamente, che soddisfano la relazione  $Z(j\omega) \cdot Y(j\omega) = 1$ . Risulta inoltre che i numeri complessi  $Z(j\omega_0)$  e  $Y(j\omega_0)$  coincidono con i numeri complessi  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  del punto precedente.

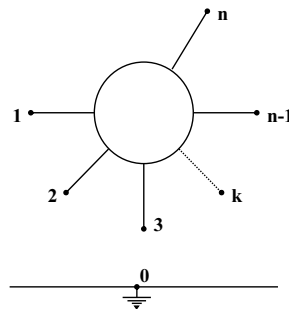
- **Bipoli lineari autonomi soggetti a grandezze trasformabili secondo Laplace e che all'istante  $t = 0$  si trovano nello stato zero (energia elettrica e magnetica nulle).**

La relazione costitutiva è  $V(s) = Z(s) \cdot I(s)$  oppure  $I(s) = Y(s) \cdot V(s)$ , ove  $V(s)$  e  $I(s)$  sono le  $L$ -trasformate della tensione e della corrente, rispettivamente, mentre  $Z(s)$  e  $Y(s)$  sono funzioni complesse della variabile complessa  $s = \sigma + j\omega$  dette impedenza generalizzata e ammettenza generalizzata, rispettivamente, che soddisfano la relazione  $Z(s) \cdot Y(s) = 1$ . Risulta inoltre che le funzioni  $Z(j\omega)$  e  $Y(j\omega)$  ottenute imponendo  $Re\{s\} = 0$  coincidono con le funzioni citate al punto precedente.

- **Bipoli lineari non autonomi.**

In tutte le situazioni sopra citate, la relazione costitutiva è di tipo affine e può essere scritta nella forma di Thévenin  $V = V_{ca} + Z \cdot I$  oppure nella forma di Norton  $I = I_{cc} + Y \cdot V$  che sono graficamente rappresentabili con un generatore ideale di tensione posto in serie a un bipolo lineare di impedenza  $Z = 1/Y$  e con un generatore ideale di corrente posto in parallelo al medesimo bipolo, rispettivamente.

## Componenti n-polari.



**Fig. 11** -  $n$ -polo.

Con i bipoli descritti in precedenza si possono costruire molti utili (modelli di) circuiti, ma le relazioni fra tensioni e correnti associate a coppie di nodi o a rami diversi possono essere soltanto quelle che risultano dalla topologia.

Una assai maggior flessibilità per costruire modelli di circuiti elettronici si ottiene considerando, nella suddivisione di un circuito in sottocircuiti componenti, anche componenti con più di due terminali. Con riferimento alla figura 11, indicheremo con  $I_k$  la corrente entrante dal terminale  $k$ , con  $V_k$  la tensione nodale del terminale  $k$  e con  $V_{hl} = V_h - V_l$  la tensione fra il terminale  $h$  e il terminale  $l$ . Poiché le leggi di Kirchoff impongono che sia

$$I_1(t) + I_2(t) + \dots + I_k(t) + \dots + I_n(t) = 0, \quad (1)$$

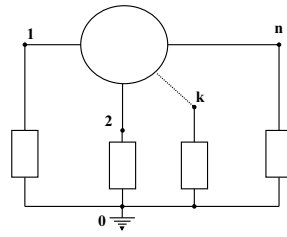
$$V_{12}(t) + V_{23}(t) + \dots + V_{n-1,n}(t) + V_{n1}(t) = 0, \quad (2)$$

solo  $n - 1$  correnti e  $n - 1$  tensioni sono linearmente indipendenti. Quindi i componenti a  $n$  terminali sono rappresentazioni grafiche di sistemi costitutivi equivalenti a  $n - 1$  relazioni fra  $n - 1$  correnti e  $n - 1$  tensioni ai terminali.

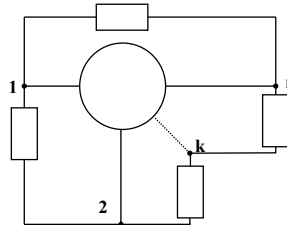
Si vedano a tale proposito i due tipici esempi che seguono.

### Circuiti connessi e completi con un componente $n$ -polare e $n$ bipoli.

Nel caso del circuito di figura 12 le incognite ai terminali sono  $n$  correnti e  $n$  tensioni di nodo, in totale  $2n$ ; i sistemi costitutivi dei bipoli equivalgono a  $n$  relazioni, il sistema costitutivo dell' $n$ -polo equivale a  $n - 1$  relazioni e la  $2n$ -sima relazione necessaria per completare il sistema è fornita dalla legge di Kirchoff per le correnti che può essere applicata indifferentemente al nodo cui sono connessi i bipoli oppure all' $n$ -polo. La legge di Kirchoff per le tensioni, invece, risulta identicamente soddisfatta in virtù della scelta delle variabili di tensione perché  $V_{12} + V_{23} + \dots + V_{n-1,n} + V_{n1} = V_1 - V_2 + V_2 - V_3 + \dots + V_{n-1} - V_n + V_n - V_1 \equiv 0$ . Nel caso del circuito di figura 13 le incognite ai terminali sono le  $n$  correnti e le  $n$  tensioni dei bipoli e le  $n$  correnti dell' $n$ -polo, in totale  $3n$ . I sistemi costitutivi dei bipoli equivalgono a  $n$  relazioni, il sistema costitutivo dell' $n$ -polo equivale a  $n - 1$  relazioni, altre  $n$  relazioni si ottengono applicando la legge di Kirchoff per le correnti ai nodi  $1, 2, \dots, k, \dots, n$  (cosicché la (1) risulta identicamente soddisfatta) e infine la  $3n$ -sima relazione necessaria per completare il sistema è fornita dalla legge di Kirchoff per le tensioni (2).

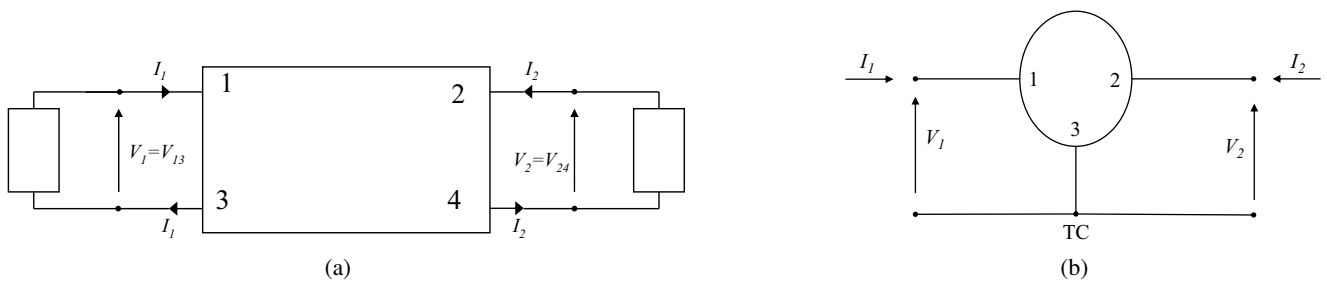


**Fig. 12** - Circuito costituito con  $n$  bipoli e un componente  $n$ -polare.



**Fig. 13** - Altro circuito costituito con  $n$  bipoli e un componente  $n$ -polare.

### Doppi bipoli.

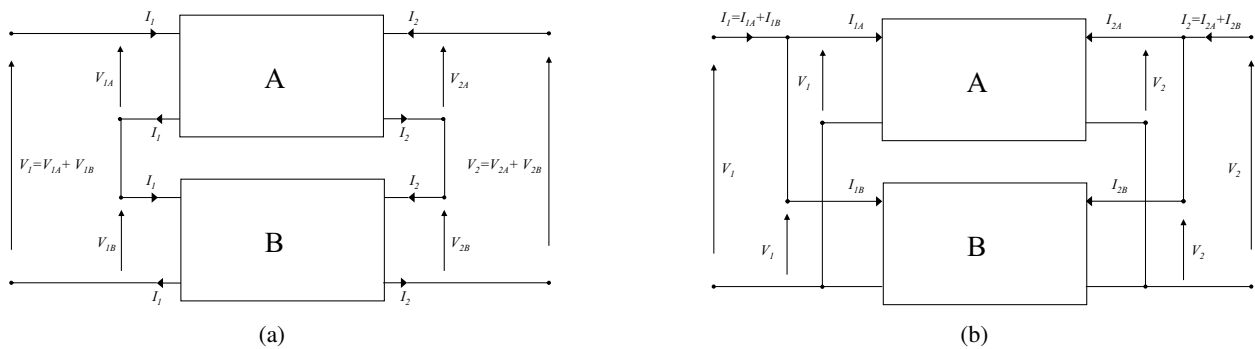


**Fig. 14** - (a) Doppio bipolo; (b) doppio bipolo costituito da un componente tripolare con un terminale comune alle due porte. Nella figura il componente tripolare è connesso "con 3 comune".

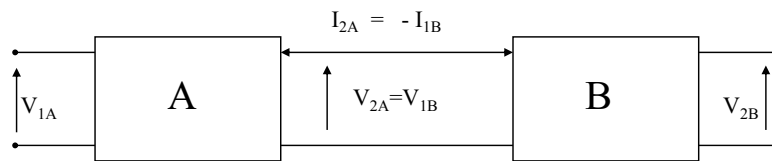
Consideriamo la struttura precedente (figura 13) con  $n = 4$  e supponiamo che due bipoli non aventi terminali comuni siano dei rami aperti: si ottiene allora una struttura del tipo di figura 14(a). In essa però appaiono come grandezze ai terminali, insieme con le uniche due correnti non necessariamente nulle in conseguenza delle ipotesi, soltanto due delle tre tensioni che figurano nel sistema costitutivo del componente quadripolare. Affinché tale figura abbia senso e interesse, in quanto rappresenta un sistema di equazioni con sole 4 incognite ai terminali, occorre quindi che nel sistema costitutivo del componente quadripolare figurino due relazioni contenenti soltanto due delle tre tensioni: solo esse saranno allora usate, insieme con quelle dei bipoli, per determinare preliminarmente  $V_1, I_1, V_2$  e  $I_2$ , nulla vietando che, se ha interesse, si usino poi le altre per calcolare anche la terza tensione ( $V_{12}$  o  $V_{34}$ ). In tal caso si dice che il componente a 4 terminali è un **doppio bipolo** o **2-porte** perché si può considerare come una generalizzazione del bipolo: i 4 terminali si possono suddividere in 2 coppie che si comportano come porte (corrente entrante in un terminale = corrente uscente dall'altro); ne segue che, in analogia con i bipoli, anche per i doppi bipoli si può definire la connessione **in serie** (Fig. 15(a)) e quella **in parallelo** (Fig. 15(b)), mentre propria dei doppi bipoli è la possibilità di connessione **in cascata** (Fig. 16)

Si noti che qualunque circuito connesso ed elettromagneticamente isolato in cui sia messo in evidenza un doppio bipolo ha la struttura rappresentata in figura 14(a).

Un importante caso particolare (Fig. 14(b)) si verifica se la struttura del doppio bipolo è tale che le 2 porte risultano avere un terminale TC in comune: si dice allora che un componente tripolare viene usato come doppio bipolo **con TC comune**.

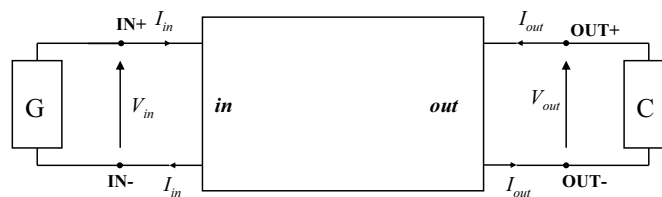


**Fig. 15** - I doppi bipoli A e B in (a) sono connessi in serie, in (b) sono connessi in parallelo.



**Fig. 16** - I doppi bipoli A e B sono connessi in cascata.

**Elaborazione di segnale con un doppio bipolo.**



**Fig. 17** - Elaborazione di segnale con un doppio bipolo.

Nella figura 17 è rappresentata la struttura tipica di un circuito che elabora il segnale applicato dal bipolo non autonomo **G** ottenendo il risultato sul bipolo autonomo **C**. Si noti che

- il bipolo **G** non è autonomo perché include il generatore di segnale;
- il bipolo **C** è il carico ed è autonomo (non contiene generatori indipendenti);
- se il doppio bipolo è **simmetrico**, non fa differenza se si scambia la porta di ingresso con quella di uscita;
- se è **reciproco**, si possono scambiare IN con OUT ottenendo due diverse elaborazioni di segnale;
- se è **non reciproco**, la scelta delle porte di ingresso e di uscita utile per elaborare segnali è univoca;
- se è **unilaterale** (e quindi anche non reciproco), le grandezze di ingresso non dipendono dal bipolo connesso alla porta di uscita.
- Tutti i doppi bipoli lineari passivi (RLC) sono reciproci.
- I doppi bipoli tipicamente elettronici sono per lo più non reciproci.

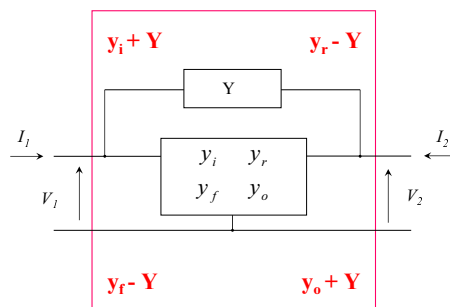


**Doppi bipoli lineari autonomi.**

In tutte le situazioni già considerate per i bipoli (grandezze sinusoidali o *F*-trasformabili o *L*-trasformabili), le relazioni (algebriche, lineari) fra le 4 variabili implicano l'uso di 4 parametri complessi che possono essere disposti in una matrice 2x2, come negli esempi seguenti.

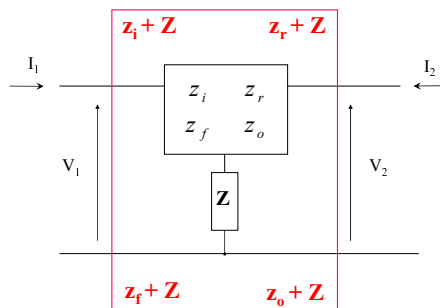
$$\begin{array}{c}
 \text{Matrice di impedenze} \\
 \text{o matrice } \mathbf{z} : \\
 \left\| \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\|
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{c}
 \text{Matrice di ammettenze} \\
 \text{o matrice } \mathbf{y} : \\
 \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\|
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{c}
 \text{Matrice ibrida} \\
 \text{o matrice } \mathbf{h} : \\
 \left\| \begin{array}{c} V_1 \\ I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ V_2 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

- Se due doppi bipoli lineari outonomi sono connessi in parallelo, essi equivalgono a un solo doppio bipolo la cui matrice di ammettenze è la somma delle matrici di ammettenze dei due doppi bipoli componenti.
- Se due doppi bipoli lineari outonomi sono connessi in serie, essi equivalgono a un solo doppio bipolo la cui matrice di impedenze è la somma delle matrici di impedenze dei due doppi bipoli componenti.



**Fig. 18** - La matrice di ammettenze del doppio bipolo composto si ottiene sommando l'ammettenza del bipolo alla diagonale principale della matrice del doppio bipolo interno e sottraendola dalla diagonale secondaria.

- Due notevoli casi particolari di quanto ora detto sono illustrati nelle figure **18** e **19**.



**Fig. 19** - La matrice di impedenze del doppio bipolo composto si ottiene sommando l'impedenza del bipolo a tutti gli elementi della matrice del doppio bipolo interno.

**Relazioni fra i parametri  $z, y, h$ .**

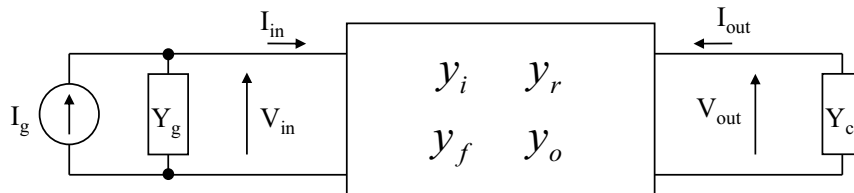
	<b>z</b>	<b>y</b>	<b>h</b>
<b>z</b>	$\begin{matrix} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_o}{y_i y_o - y_r y_f} & -\frac{y_r}{y_i y_o - y_r y_f} \\ -\frac{y_f}{y_i y_o - y_r y_f} & \frac{y_i}{y_i y_o - y_r y_f} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_i h_o - h_r h_f}{h_o} & \frac{h_r}{h_o} \\ -\frac{h_f}{h_o} & \frac{1}{h_o} \end{matrix}$
<b>y</b>	$\begin{matrix} \frac{z_o}{z_i z_o - z_r z_f} & -\frac{y_r}{z_i z_o - z_r z_f} \\ -\frac{y_f}{z_i z_o - z_r z_f} & \frac{y_i}{z_i z_o - z_r z_f} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_i} & -\frac{h_r}{h_i} \\ \frac{h_f}{h_i} & \frac{h_i h_o - h_r h_f}{h_i} \end{matrix}$
<b>h</b>	$\begin{matrix} \frac{z_i z_o - z_r z_f}{z_o} & \frac{z_r}{z_o} \\ -\frac{z_f}{z_o} & \frac{1}{z_o} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_i} & -\frac{y_r}{y_i} \\ \frac{y_f}{y_i} & \frac{y_i y_o - y_r y_f}{y_i} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{matrix}$

Osservazioni:

- se la matrice **z** è singolare ( $D_z = z_i z_o - z_r z_f = 0$ ) non esiste la matrice **y**,
- se la matrice **y** è singolare ( $D_y = y_i y_o - y_r y_f = 0$ ) non esiste la matrice **z**,
- se esiste **z** ma  $z_o = 0$  e/o esiste **y** ma  $y_i = 0$  non esiste la matrice **h**.

**Elaborazione di segnale con un doppio bipolo lineare: funzioni di rete.**

Dalla figura 20 si ricavano le seguenti relazioni:



**Fig. 20** - Schema di riferimento per il calcolo delle funzioni di rete con i parametri  $y$ .

$$\text{bipolo generatore : } I_{in} = I_g - Y_g V_{in} \tag{3a}$$

$$\text{doppio bipolo : } \begin{cases} I_{in} = y_i V_{in} + y_r V_{out} \\ I_{out} = y_f V_{in} + y_o V_{out} \end{cases} \tag{3b}$$

$$\text{carico : } I_{out} = -Y_c V_{out} \tag{3c}$$

Procedendo da monte a valle:

1. si elimina  $I_{in}$  fra (3a) e la prima delle (3b) ottenendo

$$V_{in} = \frac{I_g - y_r V_{out}}{y_i + Y_g}$$

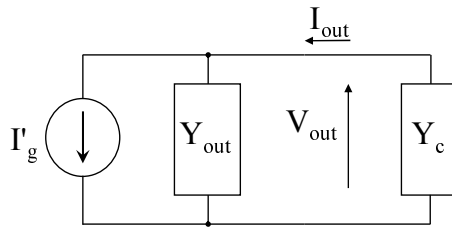
2. si elimina  $V_{in}$  fra questa e la seconda delle (3b) ottenendo

$$I_{out} = \frac{y_f}{y_i + Y_g} I_g + \left( y_o - \frac{y_f y_r}{y_i + Y_g} \right) V_{out} = I'_g + Y_{out} V_{out}$$

Quest'ultima è rappresentata graficamente dal circuito equivalente di Norton del bipolo situato a monte della porta di uscita e, insieme con la (3c), consente di calcolare facilmente  $V_{out}$  e  $I_{out}$  (Fig. 21). L'ammettenza

$$Y_{out} = \frac{I_{out}}{V_{out}} \Big|_{I_g=0} = y_o - \frac{y_r y_f}{y_i + Y_g} \quad (4a)$$

viene detta **ammettenza di uscita** del doppio bipolo con la porta di ingresso chiusa sul generatore di ammettenza interna  $Y_g$ , ed è una delle più importanti **funzioni di rete** che si possono definire per un doppio bipolo.



**Fig. 21** - Ai fini del calcolo di  $V_{out}$  e  $I_{out}$  questo circuito equivale a quello di figura 20.

Procedendo da valle a monte:

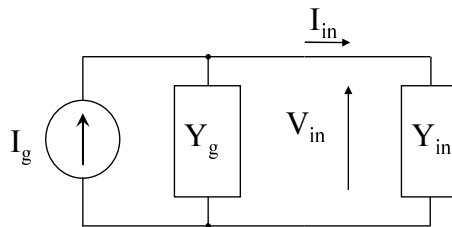
1. si elimina  $I_{out}$  fra (3c) e la seconda delle (3b) ottenendo il **guadagno di tensione** del doppio bipolo con la porta di uscita chiusa sul carico  $Y_c$

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{y_f}{y_o + Y_c} \quad (4b)$$

2. si elimina  $V_{out}$  fra questa e la prima delle (3b) ottenendo l'**ammettenza di ingresso** del doppio bipolo con la porta di uscita chiusa sul carico  $Y_c$

$$Y_{in} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = y_i + y_r A_v = y_i - \frac{y_r y_f}{y_o + Y_c} \quad (4c)$$

Quest'ultima è rappresentata graficamente dal circuito equivalente di Norton del bipolo situato a valle della porta di ingresso e, insieme con la (3a), consente di calcolare facilmente  $V_{in}$  e  $I_{in}$  (Fig. 22).



**Fig. 22** - Ai fini del calcolo di  $V_{in}$  e  $I_{in}$  questo circuito equivale a quello di figura 20.

Si può infine definire il **guadagno di corrente** del doppio bipolo con la porta di uscita chiusa sul carico  $Y_c$  e calcolarlo utilizzando la seguente identità.

$$A_i = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{I_{out}}{V_{out}} \frac{V_{out}}{V_{in}} \frac{V_{in}}{I_{in}} = -Y_c \cdot A_v \cdot \frac{1}{Y_{in}} = -A_v \frac{Y_c}{Y_{in}} \quad (4d)$$

Dalla figura 23 si ricavano le seguenti relazioni:

$$\text{bipolo generatore : } V_{in} = V_g - Z_g I_{in} \quad (5a)$$

$$\text{doppio bipolo : } \begin{cases} V_{in} = z_i I_{in} + z_r I_{out} \\ V_{out} = z_f I_{in} + z_o I_{out} \end{cases} \quad (5b)$$

$$\text{carico : } V_{out} = -Z_c I_{out} \quad (5c)$$

che sono duali di quelle della figura 20. Si può dunque procedere come in precedenza sostituendo a ogni corrente la corrispondente tensione e viceversa, a ogni ammettenza la corrispondente impedenza e ai bipoli di Norton i bipoli di Thévenin (Fig. 24), ottenendo così le medesime funzioni di rete espresse con i parametri impedenze invece che con i parametri ammettenze:

$$A_i = \frac{I_{out}}{I_{in}} = -\frac{z_f}{z_o + Z_c} \quad (6a)$$

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = z_i + z_r A_i = z_i - \frac{z_r z_f}{z_o + Z_c} \quad (6b)$$

$$Z_{out} = \left. \frac{V_{out}}{I_{out}} \right|_{V_g=0} = z_o - \frac{z_r z_f}{z_i + Z_g} \quad (6c)$$

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{I_{out}} \frac{I_{out}}{I_{in}} \frac{I_{in}}{V_{in}} = -Z_c \cdot A_i \cdot \frac{1}{Z_{in}} = -A_i \frac{Z_c}{Z_{in}} \quad (6d)$$

### Elaborazione di segnale con doppi bipoli lineari in cascata.

Si vuole analizzare un circuito lineare completo nel quale fra generatore e carico è interposta una catena di  $n$  doppi bipoli con l'intento primario di determinare il guadagno di tensione globale  $A_g(s) = V_{out}(s)/V_g(s)$ . Per comprendere i possibili procedimenti è sufficiente considerare il caso  $n = 2$  che è rappresentato nella figura 25. **D) Dal carico al generatore.**

1. Utilizzando i parametri disponibili per il doppio bipolo **B** si calcolano il guadagno di tensione  $A_{vB} = V_{out}/V_{AB}$  e/o il guadagno di corrente  $A_{iB} = I_{out}/I_{AB}$  nonché l'impedenza di ingresso  $Z_{inB} = V_{AB}/I_{AB}$  e/o l'ammettenza di ingresso  $Y_{inB} = 1/Z_{inB} = I_{AB}/V_{AB}$ . Si ricordi che tutte queste funzioni di rete dipendono, in generale, da  $Z_c$ .
2. Utilizzando i parametri disponibili per il doppio bipolo **A** si calcolano  $A_{vA} = V_{AB}/V_{in}$  e/o  $A_{iA} = -I_{AB}/I_{in}$  nonché  $Z_{in} = V_{in}/I_{in}$  e/o  $Y_{in} = 1/Z_{in} = I_{in}/V_{in}$ . Si ricordi che tutte queste funzioni di rete dipendono, in generale, da  $Z_{inB}$ .
- 3.

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \left( \frac{V_{out}}{V_{AB}} \right) \left( \frac{V_{AB}}{V_{in}} \right) = \left( \frac{V_{out}}{I_{out}} \right) \left( \frac{I_{out}}{I_{in}} \right) \left( \frac{I_{in}}{V_g} \right) = A_{vB} \cdot A_{vA} = -Z_c \cdot A_i \cdot \frac{1}{Z_g + Z_{in}} \quad (7a)$$

$$A_i = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \left( \frac{I_{out}}{I_{AB}} \right) \left( \frac{I_{AB}}{I_{in}} \right) = -A_{iB} \cdot A_{iA} \quad (7b)$$

$$\frac{V_{in}}{V_g} = \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} = \frac{Y_g}{Y_g + Y_{in}} = \frac{1}{1 + Z_g Y_{in}}; \quad A_g = A_v \left( \frac{V_{in}}{V_g} \right) \quad (7c)$$

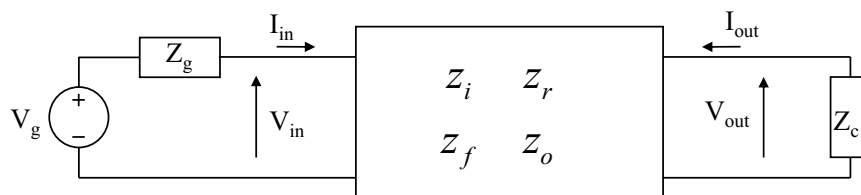
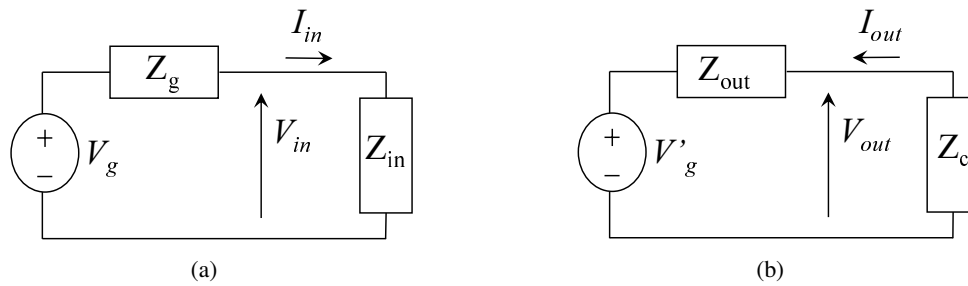
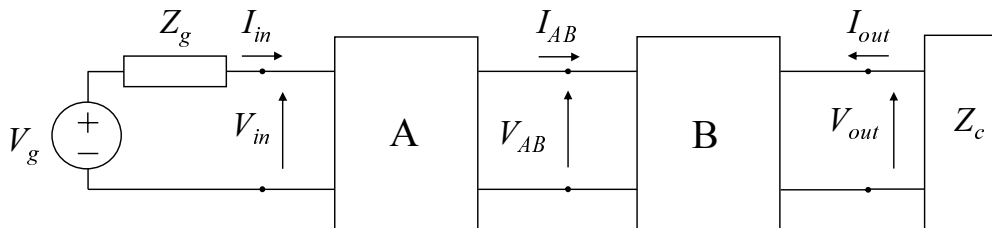


Fig. 23 - Schema di riferimento per il calcolo delle funzioni di rete con i parametri  $z$ .



**Fig. 24** - Per calcolare  $V_{in}$  e  $I_{in}$  nel circuito della figura 23 si può usare il circuito di figura (a), per calcolare  $V_{out}$  e  $I_{out}$  nel circuito della figura 23 si può usare il circuito di figura (b).



**Fig. 25** - Una catena di doppi bipoli lineari.

## II) Dal generatore al carico.

- Utilizzando i parametri disponibili per il doppio bipolo **A** si calcolano i parametri del circuito equivalente di Thévenin del bipolo a monte della porta di connessione fra **A** e **B**,  $V_{gA} = (V_{AB})|_{I_{AB}=0}$  e  $Z_{outA} = (-V_{AB}/I_{AB})|_{V_g=0}$  (a tale scopo possono eventualmente essere utili il guadagno a vuoto  $A_{vAv} = (V_{AB}/V_{in})|_{I_{AB}=0}$  e l'impedenza di ingresso a vuoto  $Z_{inAv} = (V_{in}/I_{in})|_{I_{AB}=0}$ ). Si noti che  $V_{gA}$  dipende dai parametri di **A**, da  $V_g$  e da  $Z_g$  mentre  $Z_{outA}$  dipende dai parametri di **A** e da  $Z_g$ . Si può anche procedere in modo duale determinando i parametri del circuito equivalente di Norton del medesimo bipolo,  $I_{gA} = I_{AB}|_{V_{AB}=0}$  e  $Y_{outA} = (-I_{AB}/V_{AB})|_{V_g=0}$ .
- Utilizzando i risultati precedenti e i parametri disponibili per il doppio bipolo **B** si calcolano i parametri del circuito equivalente di Thévenin del bipolo a monte della porta di uscita,  $V_{gB} = (V_{out})|_{I_{out}=0}$  e  $Z_{out} = (V_{out}/I_{out})|_{V_{gA}=0}$  o i loro duali.
- Il risultato è un circuito, equivalente a quello dato ai fini del calcolo di  $V_{out}$  (o di  $I_{out}$ ), costituito da un generatore e due bipoli, cioè un partitore di tensione (o di corrente). Si ricava, per esempio

$$V_{out} = V_{gB} \frac{Z_c}{Z_{out} + Z_c} \quad (8)$$

che risulterà espressa in funzione di  $V_g$  (e di tutti i parametri del circuito). Questo modo di procedere è in genere un po' più laborioso del precedente, ma si veda il caso successivo.

**III) Procedimento misto.** Se si individua una porta per la quale sia noto o particolarmente facile da determinare l'equivalente di Thévenin (o Norton) del bipolo a monte, conviene procedere dal generatore al carico fino a tale porta e dal carico al generatore fino alla medesima porta giungendo ancora a un semplice partitore che consente di calcolare tensione e corrente della porta considerata in funzione dei parametri del circuito e della grandezza impressa del generatore.